4. Übung zur Linearen Optimierung SS 2008

1. Es sei $\min c^T x,\ Ax = b,\ x \geq 0$ ein Beispiel eines **LP**'s. Das Problem heißt unbeschränkt, falls es eine Folge $\{x^i\}_{i \in \mathbf{N}}$ gibt mit $Ax^i = b,\ x^i \geq 0$ und $\lim_{i \to \infty} c^\top x^i \to -\infty$. Können $\min c^T x,\ Ax = b,\ x \geq 0$ und $\min -c^T x,\ Ax = b,\ x \geq 0$ beide unbeschränkt sein?

2. Man zeige: Jedes Polytop ist konvex.

3. Sei P das von $\{x^1, \ldots, x^k\} \subset \mathbf{R}^n$ aufgespannte Polytop. Man zeige, daß es zu jedem $x \in P$ $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$ mit $1 \leq i_j \leq k$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ mit $0 \leq \lambda_k$ und $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ gibt, so daß $x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{i_k}$ gilt. (Satz von Caratheodory). (Man verwende, daß mehr als $n+1$ Punkte im $\mathbf{R}^n$ stets affin abhängig sind, d.h. es für $x^0, \ldots, x^{n+1}$ stets Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ gibt, für die gilt $\sum \lambda_i x^i = 0$, $\sum \lambda_i = 0$, mindestens ein λ_i von Null verschieden.)

4. Man zeige: Jedes Polytop ist kompakt.

5. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine Menge. Man zeige:

   (a) M ist genau dann ein Kegel, falls für alle $m \in \mathbf{N}$, $x^1, \ldots, x^m \in M$ und beliebige nichtnegative Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gilt: $\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in M$.

   (b) M^* ist ein Kegel.

Abgabe 5. 5.