

## Stochastik I

# Inhaltsverzeichnis

(endgültige Version)

### KAPITEL 0: EINFÜHRUNG

Was ist Zufall? Gibt es Zufall? Was ist Stochastik?

### KAPITEL 1: DISKRETE WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

#### 1.1 Grundbegriffe

W-Raum, W-Maß, Verteilung, Kolmogoroff'sche Axiome, Eigenschaften von W-Maßen

#### 1.2 Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsräume

#### 1.3 Urnenmodelle

(mit/ohne Zurücklegen)  $\times$  (mit/ohne Reihenfolge), Bsp: Lotto, Geburtstagszwillinge

#### 1.4 Weitere diskrete Verteilungen

hypergeometrische, Bernoulli-, Binomial-, Poisson-, geometrische Verteilung

Poisson-Approximation der Binomialverteilung

verallgemeinerte hypergeometrische und Multinomialverteilung, Multinomial-Approximation

### KAPITEL 2: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT UND UNABHÄNGIGKEIT

#### 2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes, Multiplikationsformel

Bsp. aus der Lebensversicherungsmathematik, Test auf eine seltene Krankheit

#### 2.2 Unabhängigkeit von Ereignissen

paarweise Unabhängigkeit, Unabhängigkeit (von Ereignissen!) trotz Kausalität, Kriterien, Unabhängigkeit und Komplemente

Anwendung: Beweis der Eulerschen Primzahlformel

#### 2.3 Produkträume

### KAPITEL 3: ZUFALLSGRÖSSEN, ERWARTUNGSWERTE UND VARIANZEN

#### 3.1 Zufallsgrößen

Definition, Beispiele, Verteilung einer Zufallsgröße

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung

#### 3.2 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Definition, Kriterien, gemeinsame Verteilung, Randverteilung, Zufallsvektoren

#### 3.3 Erwartungswerte

Definition, Eigenschaften

Bsp'e: Erwartungswert der Binomial-, Poisson-, geometrischen Verteilung

Berechnungsmöglichkeiten, bedingte Erwartungswerte

- 3.4 Varianzen  
Definition, Eigenschaften, Beispiele; minimale mittlere quadratische Abweichung
- 3.5 Kovarianzen  
Definition, Unkorreliertheit, Rechenregeln, Beispiele  
beste lineare Vorhersage, Cauchy–Schwarz’sche Ungleichung, Korrelationskoeffizient
- 3.6 Das schwache Gesetz der großen Zahl  
Tschebyscheff–Ungleichung, Markov–Ungleichung, Schwaches Gesetz der großen Zahl
- 3.7 Faltungen  
Definition, Faltungssatz, Beispiele, Faltungshalbgruppen
- 3.8 Erzeugende Funktionen  
Definition, Eindeutigkeitssatz, Beispiele  
Berechnung von Momenten, erzeugende Funktionen und Faltungen

#### KAPITEL 4: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN MIT DICHTEN

- 4.1 Grundbegriffe  
Dichte, Verteilungsfunktion
- 4.2 Übertragung der bisherigen Ergebnisse  
Grundbegriffe, gemeinsame Verteilung und Randverteilungen, Randdichten, Unabhängigkeit, Erwartungswert, Varianzen und Kovarianzen, Faltung, Faltungssatz
- 4.3 Beispiele  
Gleichverteilung, Exponentialverteilung, Gedächtnislosigkeit der  $\sim$ , Minimum von exponential verteilten Zufallsgrößen, Normalverteilung, Cauchy–Verteilung, Gamma–Verteilung, Zusammenhang von Gamma–, Exponential– und Poissonverteilung  
Eigenschaften der Normalverteilung: Faltungsregel, mehrdimensionale Normalverteilung (Affine Transformation einer  $n$ –dimensional standard–normal–verteilten ZG);  
incl: Dichtetransformationssatz im  $\mathbb{R}^1$  und im  $\mathbb{R}^n$   
Standardisieren von ZG’en, Äquivalenz von Unabhängigkeit und Unkorreliertheit bei der NV

#### KAPITEL 5: GRENZWERTSÄTZE

- 5.1 Gesetz der großen Zahl  
Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Schwaches Gesetz der großen Zahl, Große Abweichungen
- 5.2 Der Zentrale Grenzwertsatz  
schwache Konvergenz, Zentraler Grenzwertsatz (ohne Beweis), Satz von de Moivre–Laplace  
Anwendungen: Asymptotisches Verhalten einer Irrfahrt, Normalapproximation der Binomialverteilung, Wahlprognose

#### KAPITEL 6: MARKOV–KETTEN

Markov–Eigenschaft, Beispiele für homogene Markov–Ketten  
Übergangsmatrix, Anfangsverteilung, absorbierende Zustände  
Verteilung nach  $n$  Schritten,  $n$ –Schritt–Übergangswahrscheinlichkeiten  
Gleichung von Chapman–Kolmogoroff, Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach großer Zeit  
Mittelwerteigenschaft von Überlebenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Startpunkt  
LGS für mittlere Spieldauern in Abhängigkeit vom Startpunkt  
Irreduzible und aperiodische Markov–Ketten  
Stationäre Verteilungen: Existenz, Konvergenz im totalen Variationsabstand (ohne Beweis), Eindeutigkeit