<u>Lösung zu Aufgabe 3 Serie 12:</u>

(a) Gegenbeispiel: Für ein $n \geq 1$ sei $Y_{n-1} = 0$ und $Y_n = 1$, dann folgt $X_{n-1} = 1$ und $X_n = 2$ und wenn $Y_{n-1} = 1$ und $Y_n = 1$, dann folgt $X_{n-1} = 2$ und $X_n = 3$.
Somit gilt für beliebiges $n \geq 1$:
$\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_{n-1} = 1, Y_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | X_{n-1} = 2, X_n = 3\right) = 0$
Aber:
$\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_{n-1} = 0, Y_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | X_{n-1} = 1, X_n = 2\right) = 1$
Damit gilt also nicht: $\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_0 = i_0, ..., Y_n = i_n\right) = \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_n = i_n\right)$, denn daraus würde folgen:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_{n-1} = 1, Y_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_n = 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = 1 | Y_{n-1} = 0, Y_n = 1\right) = 1 \quad \lightning \end{aligned}$$

Somit ist die Markov-Eigenschaft also nicht erfüllt und $\left(Y_n\right)_{n\geq 0}$ keine Markov-Kette. $\square$

(b) Man zeigt zunächst, dass $\left(Y_n\right)_{n\geq 0}$ die Markov-Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = i_{n+1} | Y_0 = i_0, ..., Y_n = i_n\right) = \mathbb{P}\left(X_{2n+2} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_2 = i_1, ..., X_{2n} = i_n\right) \\ = & \sum_{j\in E} \mathbb{P}\left(X_{2n+2} = i_{n+1} | X_0 = i_0, ..., X_{2n} = i_n, X_{2n+1} = j\right) \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = j | X_0 = i_0, ..., X_{2n} = i_n\right) \\ = & \sum_{j\in E} \mathbb{P}\left(X_{2n+2} = i_{n+1} | X_{2n+1} = j\right) \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = j | X_{2n} = i_n\right), \text{ da } \left(X_n\right)_{n\geq 0} \text{ Markov-Kette} \\ = & \mathbb{P}\left(X_{2n+2} = i_{n+1} | X_{2n} = i_n\right) \text{ (nach Satz 6.1.12)} \\ = & \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = i_{n+1} | Y_n = i_n\right) \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen, dass $\left(Y_n\right)_{n\geq 0}$ die Übergangsmatrix P^2 besitzt. Dies folgt aber bereits aus dem eben gezeigten, denn danach gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = k | Y_n = l\right) &= \sum_{j\in E} \mathbb{P}\left(X_{2n+2} = k | X_{2n+1} = j\right) \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = j | X_{2n} = l\right) \\ &= \sum_{j\in E} p_{jk} p_{lj} = \sum_{j\in E} p_{lj} p_{jk} = \left(P^2\right)_{lk} \end{aligned}$$

Für $k \geq 3$ zeigt man analog: Sei $Z_n := X_{kn}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Ü-Matrix P^k.

$\square$