Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt

Wintersemester 2010/2011

Stochastik I – Grundlagenwiederholung

Mengenlehre – der Unterschied zwischen $\in$ und $\subseteq$:

Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $a \in \{a, b, c\}$

(b) $a \subseteq \{a, b, c\}$

(c) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$

(d) $\{b\} \subseteq \{a, b, c\}$

(e) $\{\emptyset\} \subseteq \{a, b, c\}$

(f) $\{b\} \in \{a, b, c\}$

(g) $\emptyset \subseteq \mathfrak{P}(\{a, b, c\})$

(h) $\emptyset \in \mathfrak{P}(\{a, b, c\})$

Mengenlehre – Kartesisches Produkt und Potenzmenge:

Warum gilt

$$\sharp(A \times B) = \sharp A \cdot \sharp B, \qquad \text{falls } A \text{ und } B \text{ endlich,}$$

sowie

$$\sharp\mathfrak{P}(A) = 2^{\sharp A}, \qquad \text{falls } A \text{ endlich?}$$

Warum ist im Allgemeinen

$$\mathfrak{P}(A \cup B) \neq \mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B)$$

und

$$\mathfrak{P}(A \times B) \neq \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)?$$

Mengenlehre – Distributiv– und andere Gesetze:

Es seien A, B, C Mengen. Man zeige

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iv) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Desweiteren seien $B_1, B_2, \ldots$ Mengen. Zeigen Sie

(i) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$

(ii) $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$

(iii) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$

(iv) $A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$.

Mengenlehre – Leichte Beweise:

Es seien A und B Teilmengen einer Menge Ω. Man zeige folgende Äquivalenzen:

(a) $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^C \iff B \subseteq A^C$.

(b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

Rechnen mit Binomialkoeffizienten:

Zeigen Sie folgende Aussagen ($n \in \mathbb{N}$):

(a)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \text{ für alle } k = 1, \ldots, n.$$

(b) Binomischer Lehrsatz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(c) Folgerung 1 ($x = y = 1$, Zeilensumme im PASCALschen Dreieck)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

(d) Folgerung 2 ($x = -1, y = 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(e) Folgerung 3

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$