Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt, Katharina Hees

Abgabe in den Übungen: 13.01. -17.01.2011

Wintersemester 2011

Stochastik I

10. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Man zeige, dass die Gamma–Verteilungen $\{\Gamma_{\alpha,r}, r > 0\}$ mit festem $\alpha > 0$ eine Faltungshalbgruppe bilden.
Dies ist die Aussage des Lemmas 4.3.10 (a), zum Beweis benötigen Sie den Begriff der *Beta–Funktion* – auch *Eulersches Integral der 1. Art* genannt –ggf. nachschlagen!

Aufgabe 1 (2+1+2=5 Punkte)
Man beweise das Lemma 4.3.7 der Vorlesung.

Aufgabe 2 (4+2+2+1=9 Punkte)

(a) Sei $X \sim N(0,1)$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Sie dürfen die Tatsache benutzen, dass alle diese Momente existieren.

(b) Sei $X \sim N(0, I_n)$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung.
Man zeige, dass $Y := T(X) \sim N(0, I_n)$.

(c) Sei $X \sim N(0,1)$. Bestimmen Sie die Verteilung von X^2.
Nutzen Sie die Symmetrie von $\varphi_{0,1}$ aus, falls Sie den Satz 4.3.13 benutzen möchten.

(d) Seien $X_1, \ldots, X_n \sim N(0,1)$ i.i.d. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1^2 + \ldots + X_n^2$.

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

(a) Sei $X \sim U[0,1]$ und $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Wir definieren $F^{-1}\colon [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ per
$$F^{-1}(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}, \qquad x \in [0,1].$$
Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße $Y := F^{-1}(X)$ die Verteilungsfunktion F besitzt.

(b) Im Punkte $(0,a)$, $a > 0$, der Ebene befinde sich eine Lichtquelle, die in alle Richtungen gleichmäßig strahlt. Man zeige, dass die auf der x–Achse auftreffende Lichtmenge Cauchy–verteilt ist.

Aufgabe 4* (+4* Punkte)
Eine Zufallsgröße $Z = (Z_1, Z_2)$ sei auf der Einheitskreisscheibe $K := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ gleichverteilt. Man stelle Z in Polarkoordinaten (R, Φ) dar und zeige, dass R und Φ unabhängig sind. Welche Verteilung besitzen R^2 und Φ?