Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt, Katharina Hees

Abgabe in den Übungen: 27.01. -31.01.2011

Wintersemester 2011

Stochastik I

12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)
Berechnen Sie im Beispiel 6.1.5 („Der betrunkene Mann“) die Wahrscheinlichkeit, dass der betrunkene Mann sein Zuhause vor der Bar erreicht, wenn er an der Bank startet. Stellen Sie einen Zusammenhang zur Aufgabe 3 des Blattes 6 her.
Berechnen Sie die mittlere Zeit, die vergeht, bis der Betrunkene einen der absorbierende Zustände (Bar oder Zuhause) erreicht.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie im Beispiel 6.1.8 („Die kleine Stadt“) den Verteilungsvektor $\pi^{(n)}$ der möglichen Positionen des Spaziergängers zur Zeit n. Berechnen Sie dazu zunächst alle Potenzen der Matrix P.

Aufgabe 3 (6+4=10 Punkte)

(a) *Funktionale von Markov–Ketten sind nicht immer Markov–Ketten!*
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov–Kette mit Zustandsraum $\{1,2,3\}$, Anfangsverteilung $\pi^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)$ und Übergangsmatrix
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir
$$Y_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } X_n = 1 \\ 1 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$
Man zeige, dass $(Y_n)_{n\geq 0}$ keine Markov–Kette ist.

(b) *Periodische Teilfolgen von Markov–Ketten sind Markov–Ketten.*
Sei $\mathrm{X} = (X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov–Kette mit Übergangsmatrix P. Wir setzen $Y_n := X_{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
(Interpretation: Wir registrieren nur jeden zweiten Zustand von X.)
Man zeige: $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine Markov–Kette mit Übergangsmatrix P^2.
Verallgemeinern Sie auf die Situation, dass wir nur jeden $k$ten Zustand von X erfassen.

Aufgabe 4* (+4* Punkte)
Die gleichstarken Spieler A, B, C spielen ein Tischtennis–Turnier. A und B beginnen. Ab da spielt immer der Spieler, der gerade ausgesetzt hat, gegen den Gewinner der gerade gespielten Partie. Das Turnier endet, wenn ein Spieler zwei Partien direkt hintereinander gewinnt. (Und dieser Spieler ist dann der Sieger des Turniers.) Wie groß sind jeweils die Chancen von A, B und C, das Turnier zu gewinnen? Wie groß ist die mittlere Dauer des Turniers?
Modellieren Sie das Problem mit Hilfe einer Markov-Kette, deren Zustände $\neg C$ (C setzt aus), C (C spielt zum 1. Mal in Folge), CC (C spielt zum 2. Mal in Folge), Cg (C gewinnt das Turnier) und Cv (C gewinnt das Turnier nicht) sind.