Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt

Abgabe in den Übungen: 04.11. -08.11.2010

Wintersemester 2011

Stochastik I

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $p \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass (Ω, q) mit $\Omega = \{0,1\}^n$ und

$$q(k) = p^{\sum_{i=1}^{n} k_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i}, \qquad k = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega,$$

ein Wahrscheinlichkeitsraum ist. (Beh. 1.4.4. aus der Vorlesung)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Betrachten Sie eine Folge von Urnen, wobei sich in der N-ten Urne S_N schwarze und W_N weiße Kugeln befinden und $S_N + W_N = N$. Es gelte $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{S_N}{N} = p \in (0,1)$. Es werden jeweils n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Wogegen konvergiert die Folge der Wahrscheinlichkeiten, dass aus der N-ten Urne genau k schwarze Kugeln gezogen werden für $N \to \infty$?

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)
Alfred und Beatrix spielen ein Spiel, welches aus mehreren Runden besteht, von denen jede unabhängig vom Ausgang aller anderen Runden mit einer 50 : 50–Chance von Alfred oder Beatrix gewonnen wird. Der Gewinner einer Runde bekommt jeweils einen Punkt.
Jeder der beiden hat 50 Euro eingezahlt, und es ist vereinbart, dass derjenige, der zuerst 5 Punkte erreicht hat, die 100 Euro bekommt. Nach vier Runden, von denen Alfred drei und Beatrix eine gewonnen hat, bricht ein Feuer aus, und sie müssen das Spiel abbrechen.

(a) Was ist die gerechte Aufteilung der 100 Euro zwischen den beiden Spielern? Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten, dass Alfred bzw. Beatrix zuerst 5 Punkte erreicht hätte.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung für diese Frage, falls bei Spielabbruch Alfred bereits a und Beatrix bereits b Runden gewonnen hat?

Aufgabe 4 (2+4=6 Punkte)
In einer Schublade liegen s schwarze und b blaue Socken. Greift man blind hinein, ist die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze Socken zu ziehen, $1/2$.

(a) Wie groß ist die kleinstmögliche Gesamtsockenanzahl, so dass dies möglich ist?

(b) Wie lautet die Antwort auf obige Frage, falls bekannt ist, dass sich eine gerade Anzahl von blauen Socken in der Schublade befindet?

Aufgabe 5* (+4* Punkte)
Ritter Meier hält bei König Müller um die Hand dessen Tochter an. Dieser will einwilligen, sofern Ritter Meier **hintereinander** zwei von drei Fechtrunden gewinnt. Dabei trifft er alternierend auf folgende Gegner: Entweder ist es Kunibert, der Fechtchampion des Königreichs, oder König Müller selbst. Es ist klar, dass Kunibert schwerer zu besiegen ist als König Müller. Ritter Meier kann zwischen den Reihenfolgen KÖNIG MÜLLER–KUNIBERT–KÖNIG MÜLLER bzw. KUNIBERT–KÖNIG MÜLLER–KUNIBERT wählen. Was ist klüger?
Zwischen den Runden wird ausreichend Erholung gewährt, so dass wir annehmen können, dass sich die Kämpfe nicht gegenseitig in ihrem Ausgang beeinflussen.