

Wintersemester 2011

## Stochastik I

### 4. Übungsblatt

#### Aufgabe 1 (2+1+2=5 Punkte)

Beweisen Sie Satz 2.1.4 aus der Vorlesung!

#### Aufgabe 2 (2 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 2.1.6 aus der Vorlesung!

#### Aufgabe 3 (je 1=6 Punkte)

Auf einer Zuchtperlenfarm werden Muscheln gezüchtet, dabei bringt jede Muschel mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% eine Perle hervor (und dies unabhängig vom Geschehen in allen anderen Muscheln). Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils durch exakte Rechnung und durch Anwenden der Poissonapproximation:

- Wie viele Muscheln muss man öffnen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% eine Perle zu finden?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbirgt sich in 100 Muscheln keine einzige Perle?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man in 100 Muscheln mindestens zwei Perlen?

#### Aufgabe 4 (2+5=7 Punkte)

- Ziegenproblem: In einer TV-Show kann der Kandidat zwischen drei Türen wählen. Hinter einer der Türen befindet sich ein wertvolles Auto, hinter den beiden anderen eine Ziege. Der Kandidat wählt Tür 1. Daraufhin öffnet der Showmaster Tür 3, und es wird sichtbar, dass sich eine Ziege dahinter befindet. Nun bietet der Showmaster dem Kandidaten an, zu Tür 2 zu wechseln. Wäre das (aus Sicht des Kandidaten) klug?

Wir nehmen weiterhin an: Falls der Showmaster zwei Möglichkeiten hat, eine "Ziegentür", zu öffnen, so wählt er zufällig – d.h. mit einer 50 : 50-Chance – eine davon aus.

- (1+2+2 Punkte) Es sei  $\alpha \in (0, 1/2)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie genau  $k$  Kinder hat, sei gegeben durch

$$p_0 = \alpha, \quad p_1 = \alpha, \quad p_k = (1 - 2\alpha)2^{-(k-1)}, k \geq 2.$$

- Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\mathbb{N}_0$  definiert.

Es sei bekannt, dass eine Familie genau zwei Jungen hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie

- keine weiteren Kinder hat.
- zusätzlich noch genau zwei Mädchen hat.

Dabei sei zusätzlich angenommen, dass das Geschlecht eines Kindes mit einer Wahrscheinlichkeit von je 50% männlich bzw. weiblich sowie unabhängig vom Geschlecht der Geschwister sei.

#### Aufgabe 5\* (+4\* Punkte)

Zwei Würfel sind folgendermaßen beschriftet: Auf den Seiten von Würfel 1 stehen die Zahlen 6,3,3,3,3,3 und auf Würfel 2 stehen die Zahlen 5,5,5,2,2,2. Man gebe eine mögliche Beschriftung eines dritten Würfels an, so dass folgendes Spiel für Babette vorteilhaft ist:

Alfred sucht sich aus den drei Würfeln einen aus, aus den verbleibenden zwei Würfeln darf Babette ihren Würfel auswählen. Dann würfelt jeder mit seinem Würfel einmal. Wer die höhere Zahl hat, hat gewonnen.