Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt

Abgabe in den Übungen: 18.11. -22.11.2010

Wintersemester 2011

Stochastik I

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Aussage aus Beispiel 2.2.4 aus der Vorlesung!

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Eine Drei–Personen–Jury besteht aus zwei Juroren, die unabhängig voneinander die richtige Entscheidung (unter zwei Möglichkeiten) mit der Wahrscheinlichkeit p fällen, der dritte Juror wirft eine faire Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Jury korrekt entscheidet, falls eine einfache Mehrheit ausreicht? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3 (6+3=9 Punkte)

(a) Es seien $n \geq 2$, $\Omega = \{0,1\}^n$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 2^{-n}$ für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$. Wir betrachten die Ereignisse
$$A_i := \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega |\ \omega_i = 1\}$$
sowie das Ereignis $B := \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega |\ \omega_1 + \ldots + \omega_n \equiv 1 \mod 2\}$. Man überprüfe die folgenden Tupel von Ereignissen auf Unabhängigkeit.
   (i) $(A_1, \ldots, A_n, B)$
   (ii) $(A_1, \ldots, A_n)$
   (iii) $(A_2, \ldots, A_n, B)$

(b) Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_i) = p, i = 1, 2, \ldots, n$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   (i) mindestens eins der Ereignisse eintritt,
   (ii) genau m der Ereignisse eintreten $(0 \leq m \leq n)$,
   (iii) mindestens m der Ereignisse eintreten $(0 \leq m \leq n)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Alfred und Birgit werfen abwechselnd ein Paar Würfel. Alfred gewinnt, falls seine Augensumme 6 ergibt (und Birgit nicht schon vorher gewonnen hat) – Birgit hingegen gewinnt, falls ihre Augensumme 7 ergibt (und Alfred nicht schon vorher gewonnen hat). Alfred beginnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt?

Aufgabe 5* (+4* Punkte)
POLYAS Urne : In einer Urne befinden sich zu Beginn s schwarze und b blaue Kugeln. Wir ziehen eine Kugel und legen diese Kugel zusammen mit d Kugeln der gezogenen Farbe zurück in die Urne. Dies wiederholen wir unbeschränkt oft. (Dabei sind $s, b, d \in \mathbb{N}$ fest und gegeben.)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne p_n die Wahrscheinlichkeit, im $n$ten Zug eine schwarze Kugel zu ziehen. Man zeige: $p_n = p_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Falls es Ihnen nicht gelingt, die Aussage zu beweisen, zeigen Sie sie für $n = 2$ und $n = 3$.