Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt

Abgabe in den Übungen: 25.11. -29.11.2010

Wintersemester 2011

Stochastik I

6. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{p})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ Ereignisse, und es bezeichne $\mathbf{1}_C$ die Indikatorfunktionen eines Ereignisses $C \subseteq \Omega$. Man beweise folgende Aussagen.

(a) $\mathbf{1}_{A^C} = 1 - \mathbf{1}_A$

(b) $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$

(c) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$

(d) $A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

(e) $\mathbf{1}_{A_1 \cap \ldots \cap A_n} = \mathbf{1}_{A_1} \ldots \mathbf{1}_{A_n}$

(f) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$

(g) $\mathbb{E}\mathbf{1}_A = \mathbb{P}(A)$

(h) $\mathbf{1}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - (1 - \mathbf{1}_{A_1}) \cdots (1 - \mathbf{1}_{A_n})$

(i) $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängige Ereignisse, wenn $\mathbf{1}_{A_1} \ldots \mathbf{1}_{A_n}$ unabhängige Zufallsgrößen sind.

Aufgabe 1 (5+7=12 Punkte)

(a) (2+1+2=5 Punkte) Es seien $X, Y, Z \sim \text{Geo}_p$ i.i.d., $p \in (0, 1]$.
Man berechne $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X \leq Y)$ und $\mathbb{P}(X = Y = Z)$.
Sie können die Aussage aus Beispiel 3.2.6 der Vorlesung benutzen.

(b) (3+4=7 Punkte) Es seien $X, Y \sim \text{Geo}_p$ i.i.d., $p \in (0, 1]$. Man bestimme die Verteilung der Zufallsgröße $M := \max\{X, Y\}$ sowie die gemeinsame Verteilung von M und X.

Aufgabe 2 (1+2=3 Punkte)
Man zeige, dass die Poissonverteilung zum Parameter $\alpha > 0$ der Rekurrenzgleichung

$$\text{Pois}_\alpha(k) = \frac{\alpha}{k}\text{Pois}_\alpha(k-1), \qquad k \in \mathbb{N},$$

genügt. Bestimmen Sie für gegebenes $\alpha > 0$ diejenigen Werte k, für die $\text{Pois}_\alpha(k)$ maximal ist (d.h. die „wahrscheinlichsten" Werte einer Poisson–verteilten Zufallsgröße).

Aufgabe 3 (2+3=5 Punkte)
Alfred hat bereits k Euro für einen Jaguar gespart, der N Euro kostet ($0 < k < N$). Um den fehlenden Betrag zu gewinnen, läßt er sich mit Brunhilde auf folgendes Spiel ein: Er wirft wiederholt eine Münze; erscheint Kopf, erhält er einen Euro von Brunhilde, erscheint Zahl, so zahlt er einen Euro an Brunhilde. Er spielt solange, bis er entweder sein ganzes Geld verloren, oder er aber genug Geld für den Jaguar zusammen hat. (Wir nehmen an, dass Brunhilde mindestens $N - k$ Euro besitzt und bis zum Eintreten einer der beiden Möglichkeiten mitspielt.)

Es bezeichne p_k die Wahrscheinlichkeit, dass Alfred alles verliert, falls er mit k Euro startet.
Man beweise, dass

$$p_k = \frac{p_{k-1} + p_{k+1}}{2}$$

gilt, und löse diese Differenzengleichung zu den Randbedingungen $p_0 = 1$ und $p_N = 0$.

Aufgabe 4* (+4* Punkte)

NEGATIVE BINOMIALVERTEILUNG : Wir betrachten ein wiederholt ausgeführtes Experiment, von denen jedes unabhängig vom Ausgang aller anderen Experimente die Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ besitzt. Es sei T_n die Wartezeit auf den n–ten Erfolg, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von $T_n - n$ gegeben ist durch die sogenannte NEGATIVE BINOMIALVERTEILUNG

$$\overline{\mathrm{Bin}}_{n,p}(k) = \binom{-n}{k} p^n (p-1)^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei der negative Binomialkoeffizient definiert ist durch

$$\binom{-n}{k} := \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $\binom{-n}{0} := 1$.