Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt

Abgabe in den Übungen: 02.12. -06.12.2010

Wintersemester 2011

Stochastik I

7. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Man beweise Lemma 3.5.3 der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

(a) In 3.5.2 hatten wir bemerkt, dass zwei unabhängige Zufallsgrößen X und Y auch unkorreliert sind, die Umkehrung hingegen nicht gilt. Zeigen Sie letzteres anhand folgenden Gegenbeispiels:
X sei eine Zufallsgröße mit $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/3$. Dann sind X und $|X|$ unkorreliert, aber nicht unabhängig.

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit positiven Werten. Man zeige

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = 1/n.$$

Aufgabe 2 (6+4=10 Punkte)

(a) (2+4=6) Man berechne die Varianz einer Poisson–verteilten Zufallsgröße sowie die Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsgröße.

(b) Man beweise das Lemma über die beste lineare Vorhersage (Lemma 3.5.6 der Vorlesung).

Aufgabe 3 (je 2=6 Punkte)
Wir werfen einen fairen Würfel 144 mal, dabei bezeichne X die Anzahl der fallenden Sechsen. Uns ist klar, dass $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$ mit $n = 144$ und $p = 1/6$, also ist $\mathbb{E}X = np = 24$ und $\mathbf{Var}X = np(1-p) = 20$ (siehe Bsp.'e 3.3.5 und 3.5.5 der Vorlesung).
Jetzt ändern wir das Experiment etwas ab, wieder bezeichne X die Anzahl der geworfenen Sechsen. Angenommen, wir haben zwei verfälschte Würfel, Würfel A zeigt die Sechs mit Wahrscheinlichkeit 1/4, Würfel B hingegen zeigt die Sechs mit Wahrscheinlichkeit 1/12. Man berechne jeweils $\mathbb{E}X$ und $\mathbf{Var}X$!

(a) Wir nehmen für die ersten 72 Würfe den einen, für die zweiten 72 Würfe den anderen Würfel.

(b) Wir wählen zufällig einen der Würfel und führen alle 144 Würfe mit diesem einen gewählten Würfel durch.

(c) Für jeden der 144 Würfe wählen wir (frisch) einen der beiden Würfel.

Aufgabe 4* (+4* Punkte)
Am Ende einer Stichwahl liegen in der Wahlurne a bzw. b Stimmen für die beiden Kandidaten. Es sei $a \geq b$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der Auszählung (Zettel für Zettel) ein Gleichstand eintritt?