Universität Siegen, FB 6 – Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Peter Arzt

Abgabe in den Übungen: 09.12. -13.12.2010

Wintersemester 2011

Stochastik I

8. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Man zeige, dass die in Bemerkung 3.6.2. (iii) genannte Verteilung die Tschebyscheff–Ungleichung mit Gleichheit erfüllt.
Man beweise die Markov–Ungleichung (Satz 3.6.3).

Aufgabe 1 (3 Punkte)
ERWARTUNGSTREUER SCHÄTZER FÜR DIE VARIANZ : Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, i.i.d. Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}X_1 =: \mu$ und $\mathbf{Var}X_1 =: \sigma^2$. Wir bezeichnen den Durchschnitt mit $\overline{X}$, d.h. $\overline{X} := (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Man zeige:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \sigma^2$$

Aufgabe 2 (2+5=7 Punkte)
Es seien N eine $\mathbb{N}_0$–wertige Zufallsgröße und $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $\mathbb{N}_0$–wertige Zufallsgrößen, die unabhängig von N sind. Wir setzen $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$ und $S_0 := 0$. Die Zufallsgröße S_N sei definiert durch $S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega)$. Die erzeugenden Funktionen von N und X_1 seien g bzw. f.

(a) Man zeige, dass die erzeugende Funktion φ von S_N gegeben ist durch $\varphi = g \circ f$.

(b) (2+3=5 Punkte) Man berechne $\mathbb{E}S_N$ und $\mathbf{Var}S_N$ (in Abhängigkeit von $\mathbb{E}N, \mathbf{Var}N, \mathbb{E}X_1$ und $\mathbf{Var}X_1$, und unter der Vorraussetzung, dass alle diese Momente existieren).

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

(a) Man zeige, dass die Familie der negativen Binomialverteilungen $\{\overline{\text{Bin}}_{n,p} | n \in \mathbb{N}\}$ mit festem $p \in (0,1)$ eine Faltungshalbgruppe bilden.

(b) In der Situation von Aufgabe 2 sei die Verteilung von X_1 gegeben durch $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{p^k}{k\ln(1-p)}$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $p \in (0,1)$ ein fester Parameter ist. N sei Poisson–verteilt. Zeigen Sie, dass S_N eine negative Binomialverteilung mit gewissen Parametern $n > 0$ (nicht notwendigerweise $n \in \mathbb{N}$) und $q \in (0,1)$ besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Wir würfeln n–mal mit einem fairen Würfel und bezeichnen mit X und Y die Anzahl der dabei auftretenden Einsen bzw. Sechsen. Man berechne $\mathbf{cov}(X,Y)$ und ϱ_{XY}.

Aufgabe 5* (+4* Punkte)
Es seien X, Y und Z identisch verteilte, nicht konstante Zufallsgrößen, für die $X + Y + Z = c$ (mit einer gewissen Konstanten $c \in \mathbb{R}$) gilt. Man zeige, dass der Korrelationskoeffizient ϱ_{XY} von X und Y gleich $-1/2$ ist. Man formuliere und beweise eine verallgemeinerte Aussage für mehr als drei Summanden.