

Wintersemester 2011

Stochastik I

9. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)

Man zeige das Lemma 4.2.4.

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

- (a) NORMALVERTEILUNG: Zeigen Sie, dass die in Bsp. 4.3.5 definierte Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz, falls diese existieren.
- (b) CAUCHY-VERTEILUNG: Zeigen Sie, dass die in Bsp. 4.3.6 definierte Funktion f_c eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, sowie Erwartungswert und Varianz, falls diese existieren.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Man bestimme die Konstanten c_1 und c_2 , so dass folgende Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichten auf \mathbb{R} sind.

$$f_1(x) = \frac{c_1}{\alpha^2 + (x - \beta)^2}, \quad f_2(x) = c_2 x^{-r} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$$

Dabei sind $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, r > 1$ feste Konstanten.

Aufgabe 3 (3x2=6 Punkte)

Es seien X gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$ und $U := \cos X, V := \sin X$. Man berechne

- (a) $\mathbb{P}(-x \leq U \leq x), x \in [0, 1]$,
- (b) $\mathbb{P}((U - 1)^2 + V^2 \leq r^2), r \geq 0$, sowie
- (c) $\mathbb{P}(|U| \leq |V|)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Jeden Freitagabend gehen Alfred und Belinda unabhängig voneinander in ihre (gemeinsame) Stammkneipe, die von 20-24 Uhr geöffnet hat. Ihr Ankunftszeiten seien gleichverteilt auf dem Zeit-Intervall von 20-24 Uhr. Jeder von ihnen bleibt exakt eine Stunde, falls die Kneipe nicht eher schließt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden in der Kneipe treffen? Wie lautet die Antwort, wenn die Kneipe statt 4 Stunden n Stunden ($n \in \mathbb{N}$) lang geöffnet ist?

Aufgabe 5* (+4* Punkte)

Ein Stab der Länge 1 wird in zwei Teile gebrochen. Dabei sei die Bruchstelle auf dem Stab gleichverteilt.

- (a) Wie groß ist die erwartete Länge des kleineren der beiden Teile?
- (b) Wie groß ist das erwartete Verhältnis der Längen beider Teile? (Erst raten, dann rechnen!)