Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 29.06. – 01.07.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

10. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Zeigen Sie die Aussagen (i), (ii) und (viii) das Satzes 2.3.6.

Aufgabe 1 (3+3+3+2+2=13 Punkte)
Zeigen Sie die Aussagen (iii) – (vii) das Satzes 2.3.6.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
(zu Satz 2.3.6 (iv)) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass sehr wohl

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{A})|\mathcal{C}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{C})|\mathcal{A}]$$

gelten kann, falls weder $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ noch $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man zeige: Für $\mathcal{L}^2$–Zufallsgrößen kann man die bedingte Erwartung auch als Orthogonalprojektion auffassen.
Beweisen Sie also folgenden Satz: Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ eine Teil–σ–Algebra. Dann ist $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ die Orthogonalprojektion von X auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d.h. es gilt

$$\mathbb{E}(X-Y)^2 \geq \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A})]^2, \qquad \forall Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ $\mathbb{P}$–fast sicher gilt.

Aufgabe 4* (+ 4* Punkte)
Angenommen, auf einer ansonsten weißen Kugel seien insgesamt 12% der Oberfläche schwarz (die schwarzen Anteile können irgendwie geformt und müssen auch nicht aus einem Stück sein). Gibt es einen in die Kugel einbeschriebenen Würfel, dessen Ecken alle weiß sind?