

Sommersemester 2011

## Stochastik II

### 3. Übungsblatt

#### Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Zeigen Sie die Aussagen der Lemmata 1.2.8. und 1.4.3.

#### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie die fehlenden Teilaussagen der Bemerkung 1.2.13 zur Vervollständigbarkeit von  $\sigma$ -Algebren:

- (i)  $\mathcal{G}$  ist  $\sigma$ -Algebra,
- (ii)  $\tilde{\mu}$  ist wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Wahl der Menge  $B$ ), und
- (iii)  $(\Omega, \mathcal{G}, \tilde{\mu})$  ist ein vollständiger Maßraum.

#### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien  $\Omega := \mathbb{N}$  und  $\mathcal{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } A^C \text{ ist endlich}\}$ . Ferner sei  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  für alle  $A \in \mathcal{F}$  definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich,} \\ 0, & \text{falls } A \text{ endlich.} \end{cases}$$

- (i) Man zeige:  $\mathcal{F}$  ist eine Algebra und  $\mu$  ist ein  $\sigma$ -endlicher Inhalt auf  $\mathcal{F}$ .
- (ii) Ist  $\mu$   $\sigma$ -additiv?
- (iii) Ist  $\mu$  stetig in  $\emptyset$ ?
- (iv) Lässt sich  $\mu$  zu einem Maß auf  $\sigma(\mathcal{F})$  fortsetzen?

#### Aufgabe 4 (2+2=4 Punkte)

Es seien  $\Omega$  eine überabzählbare Menge und  $\omega_0 \in \Omega$  ein beliebiges, aber fixiertes Element. Sei

$$\mathcal{A} := \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega \setminus \{\omega_0\}\}).$$

- (i) Man charakterisiere die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  durch Angabe ihrer Elemente.
- (ii) Man zeige, dass  $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_{\omega_0})$  ein vollständiger Maßraum ist.

#### Aufgabe 5\* (+ 4\* Punkte)

Zwei Familien A und B haben dieselbe Anzahl von Kindern. Aus jeder Familie wird je eine Stichprobe von  $n \geq 2$  Kindern mit Zurücklegen gezogen. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{in der Stichprobe aus Familie A befinden sich nur Mädchen}) \\ &= \mathbb{P}(\text{in der Stichprobe aus Familie B sind alle Kinder vom selben Geschlecht}). \end{aligned}$$

Man bestimme den Stichprobenumfang  $n$ .