Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 11.05. - 13.05.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

4. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Zeigen Sie Lemma 1.4.6.

Aufgabe 1 (3+3+3=9 Punkte)
Zeigen Sie die Lemmata 1.4.7 und 1.4.12 sowie Bemerkung 1.4.11.

Aufgabe 2 (1+2+1+1=5 Punkte)
Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Abbildung zwischen meßbaren Räumen. Man zeige:

(i) Falls $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega', \mathcal{A}')$, so ist $f = \mathrm{id}$ meßbar.

(ii) Falls $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ oder $\mathcal{A}' = \{\emptyset, \Omega'\}$, so ist jede Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ meßbar.

(iii) Sei $A \subseteq \Omega$. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ ist genau dann $\mathcal{A}$–$\mathfrak{P}(\{0, 1\})$–meßbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

(iv) Sei $A \subseteq \Omega$. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}$–meßbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3 (4+2=6 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Man zeige:

(i) F hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

(ii) F ist $\mathcal{B}$–$\mathcal{B}$–meßbar.

Aufgabe 4* (+ 4* Punkte)

(a) An einem Tresen stehen n Barhocker in einer Reihe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, Leute an den Tresen zu setzen, ohne dass zwei Trinker direkt nebeneinander sitzen müssen?
Hint: Gemeint ist die Summe über alle möglichen Anzahlen von Leuten, wo dies möglich ist. Die Möglichkeit, dass alle Hocker leer bleiben, soll dabei auch mitgezählt werden.

(b) Man betrachte nun dasselbe Problem für den Fall, dass die Hocker um einen kreisförmigen Tresen angeordnet sind. Man zeige, dass dann für alle $n \geq 2$ die Lösung des Problems durch $F_n + F_{n-2}$ gegeben ist, wobei F_n die n–te Fibonacci–Zahl bezeichnet.