Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 25.05. – 27.05.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+2=5 Punkte)
Beweisen Sie den Satz von Beppo Lévy (Korollar 1.8.2) sowie das Korollar 1.8.3 der Vorlesung.

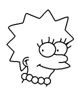
Aufgabe 2 (3+2+2=7 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$ die kleinste σ–Algebra ist, so dass alle Projektionen $\{\pi_j, j \in I\}$ messbar sind (vgl. Bemerkung 1.9.2).
Bearbeiten Sie die offenen Teilprobleme aus den Beispielen 1.9.5 (Menge A_2) und 1.9.6 (konvergente Folgen).

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, für die eine μ–integrierbare Funktion g existiert mit $|f_n| \le g, n \in \mathbb{N}$. Man zeige

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine μ–integrierbare Funktion mit $c := \int_\Omega f \mathrm{d}\mu > 0$. Man zeige

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega n \ln(1 + (f/n)^\alpha) \mathrm{d}\mu = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha \in (0,1), \\ c & \text{für } \alpha = 1, \\ 0 & \text{für } \alpha \in (1,\infty). \end{cases}$$



Man benutze das Lemma von Fatou für den Fall $\alpha \in (0, 1)$ und den Satz von der majorisierten Konvergenz für die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha \in (1, \infty)$. Außerdem ist es hilfreich, wenn man zeigt, dass $\ln(1 + x^\alpha) \le \alpha x$ für $x \ge 0$.

Aufgabe 5* (+ 4* Punkte)
Das Dreiecks–Duell Die drei Pistolen–Schützen A, B und C wollen sich duellieren – man spricht auch von einem *Triell*. Ihre Standpunkte sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Die Regeln sind so: Die Schützen schießen in der Reihenfolge $A, B, C, A, B, C, A, \ldots$, bis nur noch ein Schütze übrig ist. Dabei können sie auswählen, wohin sie schießen. Wer getroffen wurde, schießt nicht mehr. Es ist allen bekannt, dass A mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% und B mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% sein Ziel trifft. Schütze C verfehlt sein Ziel nie. Was ist die beste Strategie für A?