Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 01.06. – 03.06.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Man zeige, dass für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n), \qquad \text{wobei } \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Gilt außerdem, dass μ endlich ist, so gilt auch

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n), \qquad \text{wobei } \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Machen Sie sich außerdem (mündlich) die Bedeutung der Mengen $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ klar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ–endlicher Maßraum, λ das Lebesgue–Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine meßbare Funktion. Man zeige, dass

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(f > t) \mathrm{d}\lambda(t).$$

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf Ω, die gleichmäßig gegen eine numerische Funktion f konvergiert. Man zeige:

(a) Falls μ endlich, so ist f integrierbar.

(b) Ist μ (nur) σ–endlich, so ist f im Allgemeinen nicht integrierbar.

Aufgabe 4 (3+3=6 Punkte)

(a) Sei λ das Lebesgue–Maß auf $([0, 1], \mathcal{B}_{|[0,1]})$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, 1)$ eine Folge mit $a_n \nearrow 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_{[0,1]} g_n \mathrm{d}\lambda = 1$ und $\operatorname{supp} g_n \subseteq [a_n, a_{n+1}]$. Weiterhin sei eine Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y).$$

Man zeige, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y).$$

(b) Nun sei μ das Zählmaß auf $([0, 1], \mathcal{B}_{|[0,1]})$, das heißt $\mu(A) = \sharp A$, falls A endlich, und $\mu(A) = \infty$ andernfalls. Sei $f = \mathbf{1}_D$ die Indikatorfunktion der Diagonale $D := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \ : \ x = y\}$. Man zeige, dass:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\lambda(x) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\mu(y).$$

Beide Aussagen scheinen dem Satz von Fubini zu widersprechen. Überlegen Sie sich (mündlich), warum dieser in diesen beiden Fällen nicht anwendbar ist.

Aufgabe 5* (+ 4* Punkte)
Wir betrachten zwei gleich aussehende Urnen, in Urne A sind 2 rote und eine schwarze Kugel; in Urne B sind 101 rote und 100 schwarze Kugeln. Es wird zufällig eine Urne ausgewählt, und Sie sollen raten, um welche der beiden Urnen es sich handelt. Dazu dürfen Sie zwei Kugeln aus der betreffenden Urne ziehen. Nachdem Sie die erste Kugel gezogen, und deren Farbe gesehen haben, können Sie entscheiden, ob Sie für den zweiten Zug die Kugel zurücklegen wollen oder nicht. Erläutern und begründen Sie Ihre Strategie.