Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 22.06. – 24.06.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

9. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Schließen Sie die Lücke (b3) im Beweis von Satz 2.2.6.

Aufgabe 1 (3x2=6 Punkte)
Man beweise die in der Vorlesung in Bemerkung 2.2.18 (a) und (b) sowie in Beispiel 2.2.19 (b) formulierten Fakten.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Das Intervall $[0,1]$ werde durch einen darauf gleichverteilten Punkt X in zwei Teile zerlegt. Danach werde das größere der beiden Teile erneut durch einen darauf gleichverteilten Punkt Y in zwei Stücke zerlegt. Bezeichne A das Ereignis, dass sich aus den drei Stücken ein Dreieck (mit diesen Stücken als Seiten) konstruieren lässt. Man berechne $\mathbb{P}(A)$.

Aufgabe 3 (2+3+2+2=9 Punkte)
Wir betrachten die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, versehen mit ihrer Potenzmenge $\mathcal{F} := \mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Auf diesem messbaren Raum definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$ das Maß

$$\mathbb{P}_n(A) := \frac{1}{n}\sharp\{k \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq k \leq n, k \in A\}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Fall der Grenzwert

$$d(A) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A)$$

existiert, so heißt $d(A)$ *Dichte von* A. Bezeichne $\mathcal{D}$ die Menge aller $A \subseteq \mathbb{N}$, für die $d(A)$ existiert.

(a) Man zeige, dass $\emptyset \in \mathcal{D}$ und $\Omega \in \mathcal{D}$.

(b) Man zeige, dass $\mathcal{D}$ abgeschlossen ist bezüglich Komplement–Bildung, Differenzen–Bildung und endlichen disjunkten Vereinigungen.

(c) Man zeige, dass $\mathcal{D}$ i. A. nicht abgeschlossen ist bezüglich abzählbaren disjunkten bzw. endlichen nicht–disjunkten Vereinigungen.

(d) Für festes $a \in \mathbb{N}$ bezeichne $M_a := \{ma : m \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller natürlichen Vielfachen von a. Man bestimme die Dichte $d(M_a)$.

Aufgabe 4* (+ 4* Punkte)
Sei $\Omega = [0,1)$, versehen mit der Borel–σ–Algebra $\mathcal{F} := \mathcal{B}([0,1))$ und bezeichne $\mathbb{P} := \lambda_{|\Omega}$ das auf Ω eingeschränkte Lebesgue–Maß. Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$A_n := \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}\right).$$

Die Indikatorfunktion $R_n(\omega) := \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$ heißt *n–te Rademacher–Funktion.* Man zeige, dass $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist.