Dr. U. Freiberg zu bearbeiten bis: 11. 05. 2012

Sommersemester 2012

Fraktale Geometrie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Rufen Sie sich die Konstruktion der Cantor-Menge $\mathcal{C}$ durch "Wischen" ins Gedächtnis. E_n bezeichne die $n-$te Stufe dieser Konstruktion und $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 0} E_n$.
Nun definieren wir eine Folge von Funktionen $g_n\colon [0,1] \to [0,1]$ wie folgt:

(1) $g_n(0) = 0$ und $g_n(1) = 1$ für jedes $n \geq 0$.

(2) g_n hat Steigung $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ auf allen Intervallen der $n-$ten Stufe E_n.

(3) g_n hat Steigung 0 auf $[0,1] \setminus E_n$.

Man zeige, dass die Folge der Funktionen g_n für $n \to \infty$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon [0,1] \to [0,1]$ konvergiert, die folgende Eigenschaften besitzt: $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, g ist nichtfallend und stetig. Man gebe explizit eine Menge $Z \subseteq [0,1]$ an, so dass g auf Z differenzierbar ist mit $g'(x) = 0$ und $\lambda^1([0,1] \setminus Z) = 0$.

Aufgabe 2

Man beweise: In jedem metrischen Raum X stimmt das 0-dimensionale Hausdroff-Maß $\mathcal{H}^0$ mit dem Zählmaß überein, das heißt

$$\mathcal{H}^0(A) \quad = \quad \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Sei X ein metrischer Raum. Man zeige, dass für jede $A \subseteq X$ mit $dim_{\mathrm{H}} A < 1$ gilt: A ist total unzusammenhängend.