

Sommersemester 2012

## Stochastische Analysis

### 2. Übungsblatt

#### Aufgabe 1

Man beweise in Vorbereitung auf die nächste Vorlesung die beiden folgenden Lemmata.

**Lemma 0.1 (Lemma C)** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein Martingal. Dann gilt:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} X_s^2 \leq 4 \mathbb{E} X_t^2, \quad t \geq 0.$$

**Lemma 0.2 (Lemma D)** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein  $W$ -Raum mit einer Filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Seien  $Z^{(n)} = (Z_t^{(n)})_{t \geq 0}$  und  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  stochastische Prozesse auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $Z^{(n)}$  ein  $\mathbb{F}$ -Martingal.

(ii) Für alle  $t \geq 0$  gilt  $Z_t^{(n)} \rightarrow Z_t, n \rightarrow \infty$ , in  $\mathcal{L}^p$  für ein  $p \geq 1$ .

Dann ist auch  $Z$  ein  $\mathbb{F}$ -Martingal.