Dr. U. Freiberg
Patricia Alonso Ruiz

zu bearbeiten bis: 26. 06. 2013

Sommersemester 2013

Fraktale Geometrie

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge, bestehend aus endlich vielen (verschiedenen) Symbolen. Die Menge aller Wörter unendlicher Länge, die man mit diesen Symbolen schreiben kann, heißt *Coderaum* und sie wird mit $\Sigma := \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ bezeichnet. Diese Menge lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\Sigma := \{w = w_1w_2w_3w_4\ldots \,:\, w_i \in \mathcal{A}\}.$$

Sei nun $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. Wir definieren die Abbildung $d_r\colon \Sigma \times \Sigma \to [0, \infty)$ durch

$$d_r(w, w') = r^k, \tag{1}$$

wobei

$$k := \inf\{n \geq 0 :\, w_{n+1} \neq w'_{n+1}\}.$$

Man zeige, dass (Σ, d_r) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 2

Zwei Metriken d, d' auf einem Raum X heißen *äquivalent*, wenn ein Homöomorphismus $\phi\colon (X, d) \to (X, d')$ existiert. Zeige, dass alle in (1) definierten Metriken d_r, $0 < r < 1$, äquivalent sind.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}$ ein Alphabet und Σ der dazugehörige Coderaum. Für jedes Wort der Länge n, $w = w_1w_2\ldots w_n$, $n \in \mathbb{N}$, $w_i \in \mathcal{A}$, definiert man den *Zylinder der Länge n* durch

$$C_{w_1w_2\ldots w_n} := \{w' \in \Sigma \,:\, w'_i = w_i,\ \forall\, i = 1, \ldots n\}.$$

Zeige, dass diese Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen in (Σ, d_r) sind.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{A} := \{0, 1\}$ das Alphabet bestehend aus den Symbolen 0 und 1. Weiterhin sei $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Coderaum. Beweise, dass Σ homöomorph zur Cantormenge ist.
(Hinweis: betrachte Σ mit der Metrik $d_{1/3}$.)