Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 28. 10. 2011

Wintersemester 2011/2012

Brownsche Bewegung I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Kreis vom Radius r und ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s. Nun wählen wir im Kreis zufällig eine Sehne aus, ihre (zufällige) Länge sei X. Man bestimme jeweils $\mathbb{P}(X > s)$, indem man den Sachverhalt „zufälliges Wählen einer Sehne“ durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum modelliert:

(a) Beide Endpunkte der Sehne werden i.i.d. und gleichverteilt auf dem Umfang des Kreises ausgewählt.

(b) Der Abstand des Mittelpunktes der Sehne vom Kreismittelpunkt wird gleichverteilt auf $(0, r)$ gewählt.

(c) Der Mittelpunkt der Sehne wird gleichverteilt auf der gesamten Kreisfläche gewählt.

Aufgabe 2

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkte wachsende Funktionen. Man zeige, dass für alle $\mathbb{R}$–wertigen Zufallsgrößen X

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(X)$$

gilt. Mit anderen Worten: $f(X)$ und $g(X)$ sind positiv korreliert. Man interpretiere.

Aufgabe 3

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige $\mathbb{R}$–wertige Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n := \sigma\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \qquad \text{und} \qquad \mathcal{G}_n := \sigma\langle X_n, X_{n+1}, \ldots\rangle.$$

Man nennt $\mathcal{F}_n$ (bzw. $\mathcal{G}_n$) auch die σ–Algebra der vom Zeitpunkt n aus betrachtet vergangenen (bzw. zukünftigen) Ereignisse. Wir definieren die sogenannte **terminale σ–Algebra** per

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n.$$

(a) Man gebe nichttriviale Elemente von $\mathcal{T}_\infty$ an.

(b) Man zeige für festes $n \in \mathbb{N}$ die Unabhängigkeit der σ–Algebren $\mathcal{F}_n$ und $\mathcal{G}_{n+1}$.

(c) Man benutze (b) um zu zeigen: Für jedes $A \in \mathcal{T}_\infty$ gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 4

Man zeige:

(a) Die asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist transient, d.h. $(S_n)_{n\geq 0}$ kehrt mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft zum Ursprung zurück.

(b) Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist rekurrent, d.h. $(S_n)_{n\geq 0}$ kehrt mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft zum Ursprung zurück.