Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 04. 11. 2011

Wintersemester 2011/2012

Brownsche Bewegung I

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei $U \sim U[0,1]$. Wir definieren den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in[0,1]}$ durch

$$X_t(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t = U(\omega), \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Wir definieren weiterhin den stochastischen Prozess $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ durch $Y_t(\omega) := 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Man zeige, dass die zufälligen Funktionen X und Y auf dem Raum $F := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$, versehen mit der durch die Mengen der Form $\{f \in F : f(t) \in B\}$, $t \in [0,1]$, $B \in \mathcal{B}[0,1]$, erzeugten σ–Algebra $\mathcal{F}$ dieselben Verteilungen besitzen. Man folgere daraus, dass die Menge $\{f \in F : f \text{ ist stetig}\}$ nicht in $\mathcal{F}$ liegt.

Dieses Beispiel beweist die Bemerkung 2.1.5 der Vorlesung. Man bearbeite analog das Beispiel 2.2.5 der Vorlesung.

Aufgabe 2

Eine n–dimensionale Zufallsgröße X heißt Standard–Gauß–Vektor, falls ihre Komponenten i.i.d. $N(0,1)$–verteilt sind. Man beweise mit Hilfe der Dichtetransformationsformel (d.h. ohne die Aussagen von Abschnitt 2.2.3 der Vorlesung): Falls X ein Standard–Gauß–Vektor und $A \in O(n)$ ist, so ist auch AX ein Standard–Gauß–Vektor.

Aufgabe 3

Man beweise: Falls X und Y d–dimensionale Gauß–Vektoren mit $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ und $\mathbf{cov}X = \mathbf{cov}Y$ sind, dann haben X und Y dieselbe Verteilung. (Man beweise diese Aussage unter alleiniger Benutzung von Definition 2.2.7 aus der Vorlesung!)

Aufgabe 4

(a) Es sei $B = \{B_t, t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung mit beliebigem Startpunkt $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann für alle $s, t \geq 0$ gilt: $\mathbf{cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$.

(b) Man zeige, dass die Brownsche Bewegung mit Start in $x \in \mathbb{R}$ ein Gauß–Prozess ist.

(c) Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine **zweiseitige Brownsche Bewegung** $\{B_t, t \in \mathbb{R}\}$ mit Startpunkt x existiert, also ein Prozess mit $B_0 = x$ $\mathbb{P}$–fast sicher, der stetige Pfade und unabhängige Zuwächse hat und dessen Inkremente $B_{t+h} - B_t$ für alle $h > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz h sind.

(d) Zeigen Sie die Skalierungsinvarianz der Brownschen Bewegung : Es seien $\{B_t, t \geq 0\}$ eine Standard–Brownsche Bewegung und $a > 0$.
Dann ist auch der durch $X_t := \frac{1}{a} B_{a^2 t}$ definierte Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ eine Standard–Brownsche Bewegung.