Dr. U. Freiberg zu bearbeiten bis: 23. 01. 2012

Wintersemester 2011/2012

Fraktale und Chaos

4. Übungsblatt

Wir betrachten für die gesamte Aufgabe die Familie der Polynome $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 - c, c \in \mathbb{C}$.
Man zeige:

Aufgabe 1

(a) f besitzt einen attraktiven Fixpunkt $z_1 = (1 - \sqrt{1+4c})/2$ genau dann, wenn c im Inneren der Menge C_0 mit Rand

$$\partial C_0 := \left\{ \frac{e^{2i\varphi} - 2e^{i\varphi}}{4} : 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$

liegt.

(b) f besitzt einen neutralen Fixpunkt $z_1 = e^{i\varphi}/2$ mit $f'(z_1) = e^{i\varphi}$ genau dann, wenn $c = \frac{e^{2i\varphi}-2e^{i\varphi}}{4}$ für ein $0 \le \varphi \le 2\pi$ ist.

(c) In beiden Fällen (außer für $\varphi = 0$, d.h. $c = 1/4$) ist der Fixpunkt $z_2 = (1 + \sqrt{1+4c})/2$ abstoßend und gehört zur Julia–Menge $J(f)$.

(d) Die Kurve ∂C_0 entsteht (wie in der Vorlesung beschrieben), indem man einen Kreis auf einem anderen Kreis abrollt. Man mache sich klar, welche Kreise dies genau sind (Mittelpunkt, Radius) und skizziere ∂C_0.

Aufgabe 2

(a) f besitzt genau einen Orbit der Periode 2.

(b) Dieser Orbit ist anziehend, genau dann wenn $|1 - c| < 1/4$.

(c) Man zeichne diesen Kreis in dieselbe Skizze.

Aufgabe 3

(a) Falls $|z| = 2 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ und $|z| \ge |c|$, dann ist $|f(z)| \ge (1+\varepsilon)|z|$ und somit $\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(z) = \infty$.

(b) Falls $\Re(c) < -1$, dann ist $\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(0) = \infty$.