

Übungsblatt 1

Verzweigungs- und Erneuerungstheorie

Aufgabe 1

Es sei $(Z_n)_n$ ein Galton-Watson Prozess mit $Z_0 = 1$ und $\mathbb{E} = \mu$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(Z_n Z_m) = \mu^{n-m} \mathbb{E}(Z_m^2)$ für $m \leq n$. Bestimmen Sie damit den Korrelationskoeffizienten $\rho(Z_m, Z_n)$ und stellen ihn mit Hilfe von μ dar.

Aufgabe 2

Betrachten Sie einen Galton-Watson Prozess $(Z_n)_n$ mit $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Wählen Sie zufällig zwei Individuen aus Generation n (mit Zurücklegen). Es sei L der Index der Generation, die den nächsten gemeinsamen Vorfahren enthält. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(L = r) = \mathbb{E}(Z_r^{-1}) - \mathbb{E}(Z_{r+1}^{-1})$ für $0 \leq r < n$.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Galton-Watson Prozess mit $Z_0 = 1$ und $P(Z_1 = k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, wobei $p + q = 1$. Sei $T = \min\{n: Z_n = 0\}$ die Aussterbezeit. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(T = n)$. Für welche Werte von p ist $\mathbb{E}(T) < \infty$?