Kapitalprozess einer Risikolebensversicherung

Versicherungsvertrag: Ein Versicherungsunternehmen (VU) zahlt an den Versicherungsnehmer (VN) eine vereinbarte Leistung, wenn der VN ein vereinbartes Höchstalter M nicht erreicht. Die jährlich zu zahlende Prämie wird bei Abschluss der Versicherung vereinbart und kann danach nicht mehr erhöht werden. Die Prämienzahlung endet mit dem Tod des VN, spätestens aber mit der Erreichen des Höchstalters.

Äquivalenzprinzip der Lebensversicherung: Die erwarteten Barwerte der Nettoprämienzahlungen entsprechen denen der Versicherungsleistungen eines VN. Risiken und Zinsen werden also berücksichtigt, Kosten und Sicherheitszuschläge zunächst nicht.

Bezeichnungen:

x ganzzahliges Lebensalter eines VN

T_x zufällige Restlebensdauer eines (heute) x-Jährigen, stetig verteilt

$x + T_x$ Gesamtlebensdauer eines x-Jährigen

${}_tq_x = P\{T_x \leq t\}$ W., dass ein x-Jähriger innnerhalb von t Jahren stirbt

${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P\{T_x > t\}$

$q_x := {}_1q_x$ und $p_x := {}_1p_x$

Stationaritätsbedingung:

$$
{}_tp_{x+s} = P\{T_{x+s} > t\} = P(T_x > t+s | T_x > s) = \frac{{}_{t+s}p_x}{{}_sp_x}, \quad x, s, t \geq 0.
$$

Die Verteilung der Restlebensdauer hängt nicht vom Geburtsjahr sondern nur vom erreichten Alter ab! Es gelten auch folgende Beziehungen:

$$
{}_{t+s}p_x = {}_tp_{x+s} \cdot {}_sp_x \qquad \Rightarrow \qquad {}_{k+1}p_x = p_{x+k} \cdot {}_kp_x \quad (t = 1, k = s \geq 0)
$$

$$
P(T_x > k | T_x > k-1) = p_{x+k-1}
$$

$$
{}_kq_x - {}_{k-1}q_x = P\{k-1 < T_x \leq k\} = P(T_x \leq k | T_x > k-1) \cdot P\{T_x > k-1\} = q_{x+k-1} \cdot {}_{k-1}p_x
$$

Annahmen und weitere Bezeichnungen:

- Die Versicherungsumme beträgt 1 Euro und wird zum Ende des Jahres gezahlt, in dem der VN stirbt.
- Die Prämienzahlung erfolgt jeweils zu Beginn eines Jahres.
- Die Vertrag und die Prämienzahlung enden, wenn der VN stirbt oder das Höchsalter M erreicht, z.B. $M = 67$.
- Alle VN wurden an einem 1. Januar geboren, der Vertrag beginnt und endet an einem 1. Januar um 0.00 Uhr,
- Der erzielbare Kapitalmarktzins z sei konstant, z.B. $z = 3\%$ p.a.
- $v = \frac{1}{1+z}$ Diskontierungsfaktor

Berechnung der Nettoprämie für einen x-Jahrigen bei Vertragsabschluss

Erwarteter Barwert bei einer jährlichen Prämienzahlung eines VN von einem Euro:

$$b_x := E\Big(\sum_{k=0}^{\min(T_x, M-x-1)} v^k \Big) = E\Big(\sum_{k=0}^{M-x-1} v^k 1_{[0,T_x)}(k) \Big) = \sum_{k=0}^{M-x-1} v^k P\{T_x > k\} = \sum_{k=0}^{M-x-1} v^k {}_k p_x$$

Erwartete Versicherungsleistung (Nettoeinmalprämie):

$$\mathrm{NEP}_x := E\Big(\sum_{k=1}^{M-x} v^k 1_{[k-1,k)}(T_x) \Big) = \sum_{k=1}^{M-x} v^k P\{k-1 < T_x \leq k\} = \sum_{k=1}^{M-x} v^k ({}_k q_x - {}_{k-1} q_x),$$

da T_x stetig verteilt ist. Damit beträgt die jährlich zu zahlende Nettoprämie JNP_x für einen VN, der bei Vertragsbeginn x Jahre alt war:

$$\mathrm{JNP}_x = \mathrm{NEP}_x / b_x$$

Aufgabe: Simuliere den Kapitalprozess $U(t)$ des VU, wobei

$$U(t) := (U(t-1) + \text{Prämieneinnahmen im Jahr t})(1+z) - \text{Todesfallleistungen im Jahr t}, \qquad t \geq 1,$$

und $U(0)$ gegeben ist. Weiterhin sei n_{yx} der Bestand an x-Jährigen VN mit Eintrittsalter y zum Jahresbeginn des Jahres t . Die Bestandsänderung zum Jahr $t+1$ erfolgt zufällig durch

- Ausscheiden durch Tod durch $N_{yx} \sim B_{(n_{yx}, q_x)}$
- Ausscheiden durch Erreichen des Alters M: $n_{y,M-1} - N_{y,M-1}$
- Neue Vertragsabschlüsse nach einer Poisson-Verteilung

  $$A_y \sim P_{\lambda_y},$$

  wobei der Parameter $\lambda_y > 0$ frei gewählt werden kann, $y = 0, \ldots, M-1$.

Sterbetafeln mit geschätzen Sterbewahrscheinlichkeiten für q_x werden z.B. vom Statistischen Bundesamt veröffentlicht: `https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Sterbefaelle/Tabellen/SterbetafelDeutschland.html`