Fachbereich 6-Mathematik
Seminar „Spieltheorie und Glücksspiele“
Sommersemester 09

Optimale Strategien beim Spiel „Rot und Schwarz“

Verfasser
Tatiana Wandraj

29. August 2009

Betreuer
Prof. Dr. Alfred Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Das Spiel „Rot und Schwarz“ **3**

3 Timid-Play-Strategie **6**

4 Bold-Play-Strategie **12**

Literaturverzeichnis **17**

Kapitel 1

Einleitung

Diese Seminararbeit behandelt optimale Strategien beim Spiel „Rot und Schwarz“. Dabei spielt der Spieler unabhängig identisch verteilte Spiele, mit jeweils der Erfolgswahrscheinlichkeit p und macht in jedem Spiel einen Einsatz, bis er eine vordefinierte Schranke erreicht oder ruiniert ist. Wir werden zwei wichtige Strategien, Timid-Play-Strategie und Bold-Play-Strategie, in diesem Zusammenhang betrachten und deren Optimalität unter bestimmten Voraussetzungen zeigen.
Diese Arbeit orientiert sich stark an dem Buch „Introduction to stochastic dynamic programming“ vom Sheldon Ross, Kapitel IV.

Kapitel 2

Das Spiel „Rot und Schwarz“

In diesem Kapitel betrachten wir eines der einfachsten Glücksspiel-Modelle der Spieltheorie, das sogenannte „Rot und Schwarz“-Spiel. Sie wurde in Anlehnung an [1] abgefasst.
Den Namen „Rot und Schwarz“ hat das Spiel einer der beliebtesten und gleichnahmigen Einsatzmöglichkeit beim Roulett zu verdanken. Es gibt aber auch weitere Spiele, die nach dem gleichen Prinzip gespielt werden, zum Beispiel das Spiel „passen oder nicht passen“ beim „craps“.
Im Spiel „Rot und Schwarz“ befindet sich der Spieler in folgender Situation: Er startet das Spiel mit einem bestimmten Vermögen i und kann dabei einen Einsatz s, mit $0 \leq s \leq i$ machen. Dabei gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ den Betrag s oder er verliert mit der dazugehörigen Wahrscheinlichkeit $1 - p = q$ und muss den Einsatz s zahlen. Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ sind trivial und werden im Folgenden nicht betrachtet. Der Spieler spielt unabhängige, identisch verteilte Spiele.
Formal lässt sich ein solches Spiel am einfachsten mit Indikatorfunktionen modellieren. Sei I_k eine Indikatorfunktion mit $P(I_k = 1) = p$ bzw. $P(I_k = 0) = q$, die das Ergebnis „das k-te Spiel wurde gewohnen bzw. verloren“ modelliert. Damit ist jedes Spiel ein Bernoulli-Experiment und die Folge $I_1, I_2, ...$ ist ein Bernoulli-Prozess. Des Weiteren beschreibt X_k das Spielkapital des Spielers nach dem k-ten Spiel, wobei X_0 das Startvermögen des Spielers ist, und Y_k sei der k-te Wetteinsatz. Das Vermögen des Spielers nach dem k-ten Spiel kann dann folgendermaßen rekursiv definiert werden:

$$X_k = X_{k-1} + (2I_k - 1)Y_k, \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.1}$$

Der Spieler kann keine zukünftige Ergebnisse voraussagen. Damit können wir annehmen, dass Y_k und $I_k, I_(k+1), ...$ unabhängig sind und damit

$$E(X_k) = E(X_{k-1}) + (2p - 1)E(Y_k).$$

Aus dieser Gleichung erkennt man sofort, dass falls man ein Spiel mit Nachteil für den Spieler spielt ($p < \frac{1}{2}$), $E(X_k) < E(X_{k-1})$ gilt, das Spielvermögen also eine streng monoton fallende Funktion ist. Dieser Fall ist bei den meisten Glücksspielen gegeben und deshalb für uns am interessantesten. Spielt man stattdessen ein faires Spiel ($p = \frac{1}{2}$), so ist das erwartete Vermögen konstant und hängt nicht vom Y_k ab. Für $p > \frac{1}{2}$ erhalten wir eine streng monoton wachsende Funktion. Wie man sieht, ist es sinnlos, optimale Strategien zu suchen, die das erwartete Vermögen maximieren (sonst wäre im Spiel mit Nachteil optimal, nicht zu spielen).
Wir gehen im Folgenden davon aus, dass der Spieler nur solange spielen möchte, bis sein Spielkapital eine bestimmte Schranke N erreicht und dafür bereit ist, sein gesamtes Startvermögen auszugeben. Als Beispiel betrachten wir einen Spieler, der 1.000 Euro hat, aber aus irgendeinem Grund dringend 100.000 Euro benötigt und dieses Geld im Casino gewinnen möchte. Dabei stellt sich die Frage, wie dieser Spieler spielen soll, damit die Wahrscheinlichkeit, mit 100.000 Euro in der Tasche nach Hause zu gehen, maximal wird. Diese Frage wollen wir in den folgenden Kapiteln beantworten. Dabei spielen zwei Strategien, die in einem gewissen Sinne gegensätzlig sind, eine besondere Rolle: die „Timid-Play-Strategie“ und die „Bold-Play-Strategie“.
Um eine optimale Strategie zu finden, reicht es aus, sich auf die stationären Strategien zu beschränken. Eine Strategie heißt **stationär**, falls sie nicht randomisiert ist und die Entscheidungen des Spielers nur auf seinem aktuellen Vermögen basieren.
Beschränkt man sich auf solche Strategien, dann bildet die Folge des Vermögens $X_0, X_1, \ldots$ eine Markov-Kette.
Sei $S = \{0, 1, ..., N\}$ der Zustandsraum. Wir sagen, dass wir uns im Zustand i befinden, falls das aktuelle Spielvermögen gleich i ist. Der Aktionsraum $A = \cup_{i \in S} A_i$ ist endlich mit $A_i = \{0, 1, ..., min(i, N-i)\}$, wobei die Aktionen $a \in A_i$ die möglichen Einsätze im Zustand i beschreiben. Dabei müssen wir beachten, dass der Spieler im Zusatnd i nie einen größeren Wetteinsatz machen wird, als es nötig ist, um N zu erreichen, also $min(i, N-i)$. Wir setzen für alle Aktionen $a \in A$

1. r(i,a)= 0 , falls $i \neq N$
2. r(N,a) = 1
3. $p(0|0, a) = p(N|N, a) = 1$

Aus den Annahmen (1) und (2) folgt, dass das Resultat r nur dann 1 ist, falls der Spieler sein Zielvermögen N erreicht hat. Der erwartete Gesamtgewinn ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das Vermögen des Spielers

die gewünschte Höhe N erreicht. Mit der Optimalitätsgleichung des endlichstufigen markovschen Entscheidungsprozesses kann dann diese Wahrscheinlichkeit maximiert werden.

Kapitel 3

Timid-Play-Strategie

Als erstes betrachten wir die **Timid-Play-Strategie** (vorsichtiges Spiel) im Spiel „Rot und Schwarz“. Bei dieser Strategie setzt der Spieler immer 1 Euro bis sein Spielvermögen die Schranke N oder 0 erreicht hat. Unter dieser Strategie ist der Spielkapital-Prozess $X_0, X_1, X_2, ...$ ein **Random Walk** mit absorbierenden Schranken 0 und N auf dem Raum S. Der zugehörige Übergangsgraph ist in der Abbildung 3.1 dargestellt. Die Abbildung wurde in Anlehnung an [1] Abbildung 2.1 erstellt.
Die Schranke N können wir auch als Kapital des Casinos bzw. des Spielgegners betrachten. Dann erreicht unser Spielkapital den Betrag N genau dann, wenn der Spielgegner ruiniert ist und umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir den Betrag N erzielen ist dann gegeben durch

$$p_i = P\left(X_n = N | X_0 = i\right) = 1 - q_i$$

wobei q_i die Ruinwahrscheinlichkeit ist. Es wird angenommen, dass das Spiel nicht begrenzt ist und, falls das Spielkapital den Betrag N oder 0 erreicht, nicht weiter gespielt wird.Die Wahrscheinlichkeit p_i lässt sich rekursiv berechnen.Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und

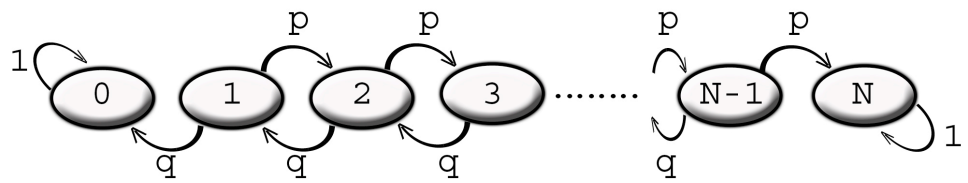

Abbildung 3.1: Übergangsgraph des Spielkapitalprozesses bei Timid-Play-Strategie

der Markov-Eigenschaft erhält man

$$\begin{aligned}
p_i &= P(X_n = N | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S}^{n} P(X_n = N, X_1 = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_n = N | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_n = N | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i).
\end{aligned}$$

In der Timid-Play-Strategie sind die Übergangswahrscheinlichkeiten: $p = P(X_1 = i+1 | X_0 = i)$, $q = P(X_1 = i-1 | X_0 = i)$ und sonst Null.

$$\begin{aligned}
p_i &= pP(X_n = N | X_1 = i+1) + qP(X_n = N | X_1 = i-1) \\
&= pp_{i+1} + qp_{i-1}, \qquad i \in \{1, 2, ..., N-1\}
\end{aligned}$$

und mit $q_i = 1 - p_i$ folgt

$$q_i = pq_{i+1} + qq_{i-1}, \qquad i \in \{1, 2, ..., N-1\}. \tag{3.1}$$

Auf der anderen Seite ist $q_i = (p+q)q_i = pq_i + qq_i$. Setzen wir dies in (3.1) ein, so ergibt sich für $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$

$$\begin{aligned}
& pq_i + qq_i = pq_{i+1} + qq_{i-1} \\
\Leftrightarrow\ & p(q_{i+1} - q_i) = q(q_i - q_{i-1}) \\
\Leftrightarrow\ & q_{i+1} - q_i = \frac{q}{p}(q_i - q_{i-1})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Mit $q_0 = P(X_n = 0 | X_0 = 0) = 1$ und $q_N = P(X_n = 0 | X_0 = N) = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
q_2 - q_1 &= \frac{q}{p}(q_1 - 1) \\
q_3 - q_2 &= \frac{q}{p}(q_2 - q_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (q_1 - 1) \ldots \\
q_i - q_{i-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} (q_1 - 1).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Jetzt addieren wir auf beiden Seiten $q_{i-1} - q_{i-2} + ... + q_2 - q_1$

$$q_i - q_1 = \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)(q_1 - 1) \tag{3.4}$$

1. Fall
Nehmen wir an, dass $q \neq 1/2$ und damit $\frac{q}{p} \neq 1$. Dann ist die Summe eine endliche geometrische Reihe und wir erhalten

$$q_i - q_1 = \left(\frac{q/p - (q/p)^i}{1 - q/p} \right) (q_1 - 1) \tag{3.5}$$

Durch Ersetzen von i durch N in (3.5) ergibt sich

$$q_1 = \frac{q/p - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}.$$

Wir setzen dieses Resultat in die Gleichung (3.5) ein und lösen sie nach q_i auf. Damit erhalten wir die Lösung für den Fall $p \neq 1/2$

$$q_i = \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N} \tag{3.6}$$

2. Fall
Für $p = 1/2$ und $q/p = 1$ lässt sich die Gleichung (3.4) zu

$$q_i - q_1 = (i - 1)(q_1 - 1) \tag{3.7}$$

vereinfachen. Mit $i = N$ folgt

$$q_N - q_1 = -q_1 = (N - 1)(q_1 - 1).$$

Wir lösen diese Gleichung nach q_1 auf und setzen es in (3.7) ein. Damit erhalten wir das Resultat für den Fall $p = 1/2$

$$q_i = 1 - \frac{i}{N},\ i \in \{1, 2, ..., N - 1\} \tag{3.8}$$

Die Gleichungen (3.6) und (3.8) geben die Ruinwahrscheinlichkeit des Spielers an. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt (sein Spielkapital die Schranke N erreicht) lässt sich mit der Gleichung $p_i = 1 - q_i$ leicht daraus berechnen:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & p = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Bemerkung 3.1. *Die Herleitung der Ruinwahrscheinlichkeit wurde aus [2], Seiten 105-107 übernommen.*

Mit der Formel (3.9) können wir nun die optimale Strategie angeben, mit der unsere Gewinnwahrscheinlichkeit maximiert wird. Dafür müssen wir zeigen, dass unter dieser Strategie der erwartete Gesamtgewinn $u(i)$ die Gleichung

$$u(i) \geq pu(i+k) + qu(i-k) \tag{3.10}$$

für $k \leq min(i, N-i)$ und $0 < i < N$ erfüllt.

Satz 3.1. *Für $p \geq 1/2$ maximiert die Timid-Play-Strategie die Wahrscheinlichkeit, den Betrag N zu erzielen.*

Beweis

- Für $p = 1/2$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Spielkapital N zu erreichen, gegeben durch

  $$u(i) = P(X_n = N | X_0 = i) = \frac{i}{N}$$

  und (3.10) ist offenbar erfüllt, da

  $$\frac{i}{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{i+k}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{i-k}{N}\right) \tag{3.11}$$

- Für $p > 1/2$ müssen wir zeigen, dass

  $$\frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} \geq p\left(\frac{1-(\frac{q}{p})^{i+k}}{1-(\frac{q}{p})^N}\right) + q\left(\frac{1-(\frac{q}{p})^{i-k}}{1-(\frac{q}{p})^N}\right)$$

  Es ist äquivalent zu

  $$1-(q/p)^i \geq p\left(1-(q/p)^{i+k}\right) + q\left(1-(q/p)^{i-k}\right)$$

  Auflösung nach $(q/p)^i$ liefert

  $$(q/p)^i \leq p(q/p)^{i+k} + q(q/p)^{i-k}$$

  Nun dividieren wir beide Seiten durch $(q/p)^i$ und erhalten

  $$1 \leq p(q/p)^k + q(q/p)^{-k}.$$

  Dies ist äquivalent zu

  $$1 \leq p\left((q/p)^k + (p/q)^{k-1}\right), \tag{3.12}$$

da $q(q/p)^{-k} = \frac{p^k}{q^k-1} = p(\frac{p}{q})^{k-1}$. Die Ungleichung (3.12) ist für $k = 1$ richtig, da $1 \leq q + p$. Nun müssen wir zeigen, dass die Funktion $f(k) := (q/p)^k + (p/q)^{k-1}$ monoton wachsend in k für alle $k \geq 1$ ist, und erhalten dann die Behauptung.
Dafür zeigen wir, dass $f'(k) \geq 0$ ist.

$$\begin{aligned} f'(k) &= (q/p)^k \, ln\,(q/p) + (p/q)^{k-1} ln(p/q) \\ &= -\,(q/p)^k \, ln\,(p/q) + (p/q)^{k-1} ln(p/q) \\ &= ln(p/q) \left((p/q)^{k-1} - (q/p)^k \right) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Das Letzte folgt aus der Annahme $p > 1/2$, denn dann ist $p/q > 1$ und $q/p < 1$.

□

Damit haben wir gezeig, dass es für den Spieler besser ist, immer den kleinsten Einsatz zu wählen, falls er ein Spiel mit Vorteil spielt. Diese Erkenntnis ist nicht wirklich überraschend, denn es intuitiv klar ist, dass er bei einem solchen Spiel langfristig gewinnen wird. Damit ist es besser, „vorsichtig“ zu spielen, um das eigene Kapital nicht unnötig zu riskieren.
Jetzt betrachten wir den Fall $p < \frac{1}{2}$ (klassisches Roulette) und wir interessieren uns diesmal nicht für die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Betrag zu erwirtschaften, sondern wie lange wir mit dem Startkapital spielen können.
Dazu stellen wir uns folgendes Spiel vor: alle Spieler haben das gleiche Startkapital i und sie spielen das Spiel „Rot und Schwarz“. Das Spiel wird derjenige Spieler gewinnen, der mit seinem Geld am längsten auskommt. In einem solchen Spiel sollte man eine Strategie wählen, die die erwartete Spieldauer maximiert. In dem nächsten Satz werden wir sehen, dass falls wir dieses Spiel mit $p < 1/2$ spielen,die Timid-Play-Strategie optimal ist.

Satz 3.2. *Für $p < 1/2$ maximiert die Timid-Play-Strategie die erwartete Anzahl von Spielen.*

Beweis

Sei T die Anzahl der Spiele, die wir spielen können bevor wir endgültig verlieren und X_j der Gewinn des j-ten Spieles. Seien T und X_j unabhängig.

Da wir positive Wetteinsätze vorausgesetzt haben, können wir nicht mehr als das Startkapital verlieren. Also

$$\sum_{j=1}^{T} X_j = -i$$

und mit der Waldschen Identität erhalten wir

$$-i = E\left(\sum_{j=1}^{T} X_j\right) = E\left(T\right) E\left(X_j\right)$$

oder für die Timid-Play-Strategie

$$E\left(T\right) = \frac{-i}{E(X)} = \frac{-i}{-1(1-p)+1p} = \frac{i}{1-2p}.$$

Sei nun u(i) die erwartete Anzahl der Spiele mit dem Startkapital i unter der Timid-Play-Strategie, die wir spielen können, bis wir ruiniert sind. Dann ist

$$u(i) = E(T) = \frac{i}{1-2p}. \tag{3.14}$$

Wir wollen nun die Theorie der markovschen Entscheidungsprozesse auf dieses Problem anwenden. Dazu sei $r = 1$ für alle Zeiten t, in denen unser Spielkapital nicht Null ist.
Damit müssen wir die Optimalitätsgleichung der Form

$$u(i) \geq 1 + pu(i+k) + qu(i-k)$$

zeigen. Mit der Gleichung (3.14) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{i}{1-2p} &\geq 1 + p\frac{i+k}{1-2p} + q\frac{i-k}{1-2p} \\ \Leftrightarrow i &\geq 1 - 2p + p(i+k) + i - k - p(i-k). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nach dem Ausmultiplizieren können wir die obere Ungleichung schreiben als

$$0 \geq 1 - 2p - k(1-2p).$$

Da wir $p < 1/2$ vorausgesetzt haben, ist $1-2p$ immer positiv und die Ungleichung ist erfüllt für alle $k \geq 1$. Damit folgt die Behauptung.

□

Somit haben wir bewiesen, dass die Timid-Play-Strategie unsere erwartete Spieldauer maximiert, falls $p < 1/2$. In dem nächsten Kapitel betrachten wir eine andere Strategie, die bei einem Spiel mit Nachteil die Gewinnwahrscheinlichkeit maximiert.

Kapitel 4

Bold-Play-Strategie

Ein Spieler verfolgt die Bold-Play-Strategie (mutiges Spiel) in dem Spiel „Rot und Schwarz“, falls er in jedem Spiel den kleinsten der folgenden Einsätze wählt: sein aktuelles Kapital i oder den Betrag, den er braucht, um sein Zielkapital N zu erreichen. Anders formuliert:

- i, falls $i \leq N/2$
- N-i, falls $i \geq N/2$

Diese Strategie wurde in Abbildung 4.1 illustriert. Wir nehmen zuerst an, dass das Spiel durch n Einsätze begrenzt ist. Sei $u_n(i)$ die Wahrscheinlichkeit, mit dem Startkapital i in n Spielen den Betrag N zu erreichen und wir verfolgen die Bold-Play-Strategie. Mit $u_n(0) = 0$, $u_n(N) = 1$, $n \geq 0$ und $u_0(i) = 0$ für $i < N$ folgt nach dem ersten Spiel

$$u_n(i) = \begin{cases} pu_{n-1}(2i), \text{ für } i \leq N/2 \\ p + qu_{n-1}(2i - N), \text{ für } i \geq N/2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Damit können wir die Optimalität der Bold-Play-Strategie bei einem Spiel mit Nachteil beweisen.

Satz 4.1. *Für $p \leq 1/2$ und alle $n \geq 0$ maximiert die Bold-Play-Strategie die Wahrscheinlichkeit, in n Spielen den Betrag N zu erreichen.*

Beweis

Nach der Optimalitätsgleichung müssen wir zeigen

$$u_{n+1}(r) \geq pu_n(r+s) + qu_n(r-s) \ , \ s \leq min(r, N-r)$$

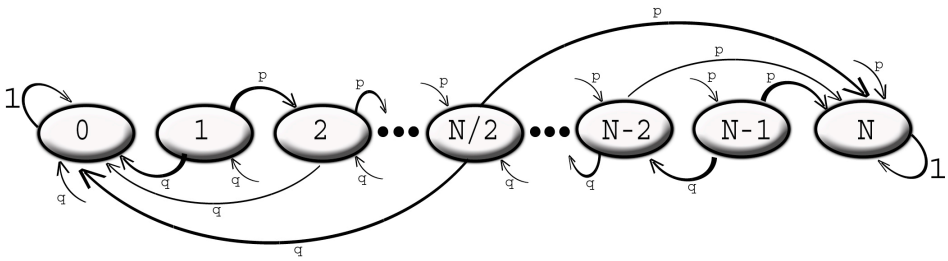

Abbildung 4.1: Übergangsgraph des Spielkapitalprozesses bei Bold-Play-Strategie

oder

$$u_{n+1}(r) - pu_n(r+s) - qu_n(r-s) \geq 0\ ,\ s \leq min(r, N-r) \tag{4.2}$$

Im Folgenden zeigen wir die Gleichung (4.2) mit der vollständigen Induktion.
(I.A.) Für n=0:

- Für $0 \leq r < N/2$ ist auch $r + s < 2r < N$ und damit

$$u_1(r) - pu_0(r+s) - qu_0(r-s) = 0.$$

- Für $N > r \geq N/2$ und $s < N - r$ gilt $2r - N < N$ und $r + s < N$. Mit der zweiten Gleichung von (4.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} & u_1(r) - pu_0(r+s) - qu_0(r-s) \\ = & p + qu_0(2r-N) \\ = & p > 0 \end{aligned}$$

- Analog gilt für $N \geq r \geq N/2$ und $s = N - r$:
  $u_1(r) - pu_0(r+s) - qu_0(r-s) = 0$

Somit ist die Aussage für $n = 0$ gezeigt.
(I.V.) Sei nun

$$u_n(i) - pu_{n-1}(i+k) - qu_{n-1}(i-k) \geq 0\ ,\ k \leq min(i, N-i)$$

richtig.
(I.S.) Um die Ungleichung (4.2) zu zeigen, müssen wir wieder eine Fallunterscheidung machen.

1. Fall: für $r + s \leq N/2$ folgt mit (4.1)

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}(r) - pu_n(r+s) - qu_n(r-s) \\
&= pu_n(2r) - p^2 u_{n-1}(2(r+s)) - qpu_{n-1}(2(r-s)) \\
&= p\left(u_n(2r) - pu_{n-1}(2r+2s) - qu_{n-1}(2r-2s)\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung erhält man aus Induktion Voraussetzung mit $i = 2r$ und $k = 2s$.

2. Fall: für $r - s \geq N/2$ erhält man analog mit der zweiten Gleichung von (4.1)

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}(r) - pu_n(r+s) - qu_n(r-s) \\
&= p + qu_n(2r-N) - p(p + qu_{n-1}(2r+2s-N)) \\
&\quad - q(p + qu_{n-1}(2r-2s-N)) \\
&= q\left(u_n(2r-N) - pu_{n-1}(2r+2s-N) - qu_{n-1}(2r-2s-N)\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt aus der Indunktions-Voraussetzung mit $i = 2r - N$ und $k = 2s$.

3. Fall: $r \leq N/2 \leq r + s,\ s \leq r$

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}(r) - pu_n(r+s) - qu_n(r-s) \\
&\overset{(4.1)}{=} pu_n(2r) - p(p + qu_{n-1}(2r+2s-N)) - qpu_{n-1}(2r-2s) \\
&= p\left(u_n(2r) - p - qu_{n-1}(2r+2s-N) - qu_{n-1}(2r-2s)\right)
\end{aligned}$$

Mit $2r \geq r + s \geq N/2$ folgt

$$\begin{aligned}
&= p\left(p + qu_{n-1}(4r-N) - p - qu_{n-1}(2r+2s-N) - qu_{n-1}(2r-2s)\right) \\
&= q\left(pu_{n-1}(4r-N) - pu_{n-1}(2r+2s-N) - pu_{n-1}(2r-2s)\right) \\
&= q\left(u_n(2r-N/2) - pu_{n-1}(2r+2s-N) - pu_{n-1}(2r-2s)\right).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhalten wir wegen $2r - N/2 \leq N/2$ mit (4.1). Für $s \geq N/4$ ist $2r + 2s - N \geq 2r - 2s$ und wir erhalten wegen $p \leq q$

$$
\begin{aligned}
& u_n(2r - N/2) - pu_{n-1}(2r + 2s - N) - pu_{n-1}(2r - 2s) \\
\geq\ & u_n(2r - N/2) - pu_{n-1}(2r + 2s - N) - qu_{n-1}(2r - 2s) \\
\overset{I.V.}{\geq}\ & 0
\end{aligned}
$$

Analog gilt für $s < N/4$

$$
\begin{aligned}
& u_n(2r - N/2) - pu_{n-1}(2r + 2s - N) - pu_{n-1}(2r - 2s) \\
\geq\ & u_n(2r - N/2) - qu_{n-1}(2r + 2s - N) - pu_{n-1}(2r - 2s) \\
\overset{I.V.}{\geq}\ & 0
\end{aligned}
$$

4. Fall: $r - s \leq N/2 \leq r$

$$
\begin{aligned}
& u_{n+1}(r) - pu_n(r + s) - qu_n(r - s) \\
=\ & p + qu_n(2r - N) - p(p + qu_{n-1}(2r + 2s - N)) - qpu_{n-1}(2r - 2s)
\end{aligned}
$$

Wegen $r - s \leq \frac{N}{2}$ und $s \leq N - r$ ist $2r - N \leq \frac{N}{2}$ und mit (4.1) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& p(p + q) + qpu_{n-1}(4r - 2N) - p^2 - pqu_{n-1}(2r + 2s - N) \\
& - qpu_{n-1}(2r - 2s).
\end{aligned}
$$

Mit $2r - \frac{N}{2} \geq \frac{N}{2}$ ist es gleich

$$
\begin{aligned}
& pu_n\,(2r - N/2) + p(q - p) - pqu_{n-1}(2r + 2s - N) \\
& - qpu_{n-1}(2r - 2s).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Für $s \leq N/4$ erweitern wir die Gleichung (4.3)

$$
\begin{aligned}
& pq - p^2 + p^2u_{n-1}(2r - 2s) - p^2u_{n-1}(2r - 2s) - qpu_{n-1}(2r - 2s) \\
& + p(u_n(2r - N/2) - qu_{n-1}(2r + 2s - N) \\
=\ & p(q - p)\,(1 - u_{n-1}(2r - 2s)) \\
& + p\,(u_n(2r - N/2) - pu_{n-1}(2r - 2s) - qu_{n-1}(2r + 2s - N)) \\
\geq\ & 0
\end{aligned}
$$

Der erste Summand ist positiv, da $q \geq p$ und $u_{n-1}(2r - 2s)$ eine Wahrscheinlichkeit ist. Der zweite Summand ist nach Induktions-Voraussetzung mit $i = 2r - N/2$ und $k = N/2 - 2s$ auch positiv.

Mit $s > N/4$ gilt für die Gleichung (4.3)

$$\begin{aligned}
&p(q-p)\,(1-u_{n-1}(2r-2s-N)) \\
&+\,p\,(u_n(2r-N/2)-pu_{n-1}(2r+2s-N)-qu_{n-1}(2r-2s)) \\
&\overset{I.V.}{\geq}\ 0
\end{aligned}$$

und wir erhalten die Behauptung.

□

Nun verzichten wir auf die Annahme, dass die Anzahl der Spiele beschränkt ist und wir zeigen, dass auch dann die Bold-Play-Strategie optimal ist.

Satz 4.2. *Die Bold-Play-Strategie maximiert die Wahrscheinlichkeit, den Betrag N jemals zu erreichen, falls $p \leq 1/2$.*

Beweis

Sei u(r) die Wahrscheinlichkeit den Betrag N zu erreichen, angefangen mit r und wir spielen die Bold-Play-Strategie.
Wegen

$$u(r) = lim_{n\to\infty} u_n(r)$$

folgt aus dem Satz 4.1

$$u(r) \geq pu(r+s) + qu(r-s),\ s \leq min(r, N-r)$$

und damit die Behauptung.

□

Damit haben wir bewiesen, dass beim „Rot und Schwarz"- Spiel mit Nachteilt die Bold-Play-Strategie eine optimale Strategie ist, falls wir die Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren wollen. Auch dieses Resultat widerspricht nicht unserer intuitiven Einschätzung. Beim Spiel mit $p \leq 1/2$ ist es besser, immer so viel wie möglich bzw. nötig zu setzen, denn je länger wir spielen, desto stärker entwickelt sich das Spiel zu unserem Nachteil.
Falls wir die Bold-Play-Strategie verfolgen, kann es mit hoher Wahrscheinlichkeit passieren, dass wir schon nach wenigen Spielen, oder sogar nach einem, ruiniert sind. Dies macht diese Strategie für die Spieler weniger attraktiv. Aber es existieren andere, davon abgeleitete Strategien, die beim Spiel mit Nachteil auch optimal sind und mit denen die Spieldauer verlängert werden kann (vgl. [1], 4. Abschnitt).

Literaturverzeichnis

[1] KYLE SIEGRIST: *How to gamble if you must*, in: http://www.maa.org/joma/Volume8/Siegrist/index.html, 2008, abgerufen am 10.05.2009.

[2] RICHARD ISAAC: *The Pleasures of Probability*,Springer-Verlag New York, 1995.

[3] SHELDON M. ROSS: *Introduction To Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press New York, 1983.