

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 35: Es seien X, Y quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\text{Korr}(X, Y) = \pm 1$. Zeigen Sie:

- (a) $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\text{Var}(Y - aX) = 0$
 (Hinweis: Formel von Bienaimée und Aufgabe 33 sind nützlich.)
- (b) $\exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so dass $P\{Y = aX + b\} = 1$
 (Hinweis: Aufgabe 33 ist nützlich.)

Aufgabe 36: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen mit $E(X_n) = \mu$, $V(X_n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $M \geq 0$, sowie $\text{Kov}(X_i, X_j) \rightarrow 0$ für $|i - j| \rightarrow \infty$. Zeigen Sie:

- (a) $\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) \leq nM + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-j} |\text{Kov}(X_j, X_{k+j})|$
 (Hinweis: Formel von Bienaimée.)
- (b) $\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-j} |\text{Kov}(X_j, X_{k+j})| < M\sqrt{nn} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^n |\text{Kov}(X_j, X_{k+j})|$,
 wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die Gaussklammer bezeichnet.
- (c) $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$ für alle $\varepsilon > 0$. D.h., daß für die Folge (X_n) das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt.

Aufgabe 37: $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei gleichverteilt in $[-1, 1]$. Zeigen Sie:

- (a) $(Y_k := \sin k\pi X)_{k \geq 1}$ sind paarweise unkorreliert.
- (b) $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k\pi X \rightarrow 0$ stochastisch.

Aufgabe 38: Zeigen sie mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0,97$ bei 1000 getrennten Versuchen mit einer fairen Münze mindestens 408-mal und höchstens 592-mal Zahl erscheint.

Abgabe: 12.01.2010.

Eine besinnliche Weihnachtszeit und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünschen ihnen Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler und das gesamte Stochastik-Team.