Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Stochastik I

Blatt 2

Aufgabe 3: Geben Sie bei den Aufgaben eine geeignete σ-Algebra zur mathematischen Beschreibung des Experiments an.

(a) Ein Würfel wird geworfen und abhängig vom Ergebnis i des Wurfes aus einer von sechs Urnen $U_1, ..., U_6$ eine Kugel gezogen, wobei in der i-ten Urne i rote und $7 - i$ schwarze Kugeln liegen. Stellen Sie das Ereignis "eine rote Kugel wurde gezogen" mathematisch dar.

(b) Beim Eiskunstlauf beurteilen die Richter die Leistungen von sechs Läufern. Jeder der Richter darf genau einmal jede Note 1,...,6 vergeben. Stellen Sie das Ereignis "ein Läufer erhält nur die Note 6 von allen Richtern" dar.

Aufgabe 4: $\mathfrak{A} \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$ sei eine σ-Algebra, $(A_n)_n \subset \mathfrak{A}$ eine Folge von Ereignissen. Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} \omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \in A_n \text{ für fast alle } n \\ \omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Seien $\mathfrak{A}, (A_n)_n$ wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die folgenden zusammengesetzten Ereignisse in $\mathfrak{A}$ liegen:

(i) Mindestens zwei der Ereignisse (A_n) treten ein.

Mit einem Run der Länge k bezeichnet man eine Folge von k hintereinander auftretenden Ereignissen aus (A_n).

(ii) Runs beliebiger Länge treten auf.

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Runs der Länge n.

(*Hinweis:* Drücken Sie die Ereignisse mit Hilfe der Mengenoperationen $\cap, \cup$ und $\setminus$ durch die Ereignisse (A_n) aus.)

Aufgabe 6: Es sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und für $i \in I$ sei $\mathfrak{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, daß dann auch

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$$

eine σ-Algebra ist.

Abgabe: Do. 29.10.09 in der Vorlesung
Bitte aus organisatorischen Gründen für jede Aufgabe ein neues Blatt!
Gruppenabgabe bis zu 3 Personen möglich.