

## Übungen zur Stochastik I

---

**Aufgabe 11:**  $\mathfrak{A} \subset \text{Pot}(\Omega)$  sei eine  $\sigma$ -Algebra,  $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$  mit  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ . Zeigen Sie, daß durch

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mu_i(A) \quad \text{für } A \in \mathfrak{A}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  definiert wird.

**Aufgabe 12:**

(a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$\{f : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \#f^{-1}(\{i\}) = k_i\}$$

aus  $\frac{r!}{k_1! \cdots k_n!}$  Elementen besteht, wobei  $k_i \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n k_j = r$  und  $r \geq n$  gilt.

(b) Bestimmen Sie mittels (a) die Anzahl der surjektiven Abbildungen zwischen  $\{1, \dots, r\}$  und  $\{1, \dots, n\}$ .

(c) Bestimmen Sie mit der Siebformel die Anzahl der surjektiven Abbildungen zwischen  $\{1, \dots, r\}$  und  $\{1, \dots, n\}$ , indem Sie zunächst die Kardinalität der Menge der nicht surjektiven Abbildungen bestimmen.

(*Hinweis:* Die Siebformel für Kardinalitäten folgt aus Satz (2.5), indem man  $P = \mathcal{L}_\Omega$  wählt und dann mit  $\#\Omega$  multipliziert!)

**Aufgabe 13:** Sei  $M := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 200\}$ .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl aus  $M$  zu ziehen, die entweder durch 2, 3 oder durch 5 teilbar ist?

**Aufgabe 14:** Man plaziere auf einem Schachbrett zufällig 8 Türme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keiner der Türme einen anderen schlagen kann?

(*Hinweis:* Man zähle ab, auf wie viele Arten sich 8 Türme auf dem  $8 \times 8$ -Schachbrett so aufstellen lassen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Turm steht.)

---

**Abgabe: Do. 12.11.09**