Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 15: Eine Firma stellt drei verschiedene Artikel a, b und c her. Sie berichtet, daß von 1000 befragten Haushalten 70 mindestens a und b, 98 mindestens b und c, 119 mindestens a und c, 49 alle drei und 190 mindestens zwei der Artikel benutzen. Kann man diesen Angaben Glauben schenken?
(*Hinweis:* Untersuchen Sie mit der Siebformel die Kardinalität der Menge aller Haushalte, die mindestens zwei Artikel benutzen.)

Aufgabe 16: Von dem großen Mathematiker und Raucher S. Banach ist überliefert, daß er stets in beiden Hosentaschen eine Streichholzschachtel hatte. Zum Anzünden einer Zigarette wählte er willkürlich eine der beiden Schachteln aus und entnahm ihr ein Streichholz.
Beide Streichholzschachteln enthalten zu Beginn je n Streichhölzer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach wiederholtem Anzünden einer Zigarette in der einen Schachtel noch k Streichhölzer sind, wenn aus der anderen Schachtel das letzte Streichholz entnommen wird.

Aufgabe 17: Es seien $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $A_n \in \mathfrak{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

$$1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \quad \text{und} \quad 1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \prod_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$$

$$1_{\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \limsup_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \quad \text{und} \quad 1_{\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \liminf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$$

$$1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \quad \text{falls die } A_n \text{ disjunkt sind}$$

$$1_{A_1\setminus A_0} = 1_{A_1} - 1_{A_0} \quad \text{falls } A_0 \subset A_1$$

Aufgabe 18: Es sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie:

(a) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar $\Longleftrightarrow \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar $\Longrightarrow f^2$ meßbar.
(c) $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar $\Longrightarrow f \cdot g$ meßbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $(f+g)^2$ meßbar ist.

Abgabe: Do. 19.11.09