Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 19: Stellen Sie fest, ob es sich bei den angegebenen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um Wahrscheinlichkeitsdichten handelt:

(a) $f(x) = (\frac{3}{2}x^2 + x) \cdot 1_{[-1,1]}(x)$
(b) $f(x) = e^{-x^2+x} \cdot 1_{[0,1]}(x)$
(c) $f(x) = (1 - |x|) \cdot 1_{[-1,1]}(x)$
(d) $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta} \cdot 1_{]0,\infty[}(x) \quad (\alpha, \beta > 0)$
(e) $f_\gamma(x) = \frac{1}{(\gamma-1)!}x^{\gamma-1}e^{-x} \cdot 1_{]0,\infty[}(x) \quad (\gamma \in \mathbb{N})$

Aufgabe 20: Ein Detektor ist in der Lage, zwei Signale getrennt zu empfangen, wenn sie mindestens eine Zeit $t > 0$ auseinanderliegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß zwei zufällig im Zeitintervall $[0, T]$ eintreffende Signale getrennt empfangen werden.

Aufgabe 21:

(a) Zeigen Sie, daß für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$ die Lebesgue-Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes definiert ist, das wir mit $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ bezeichnen.
(*Hinweis:* Benutzen Sie, daß $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du = \sqrt{2\pi}$ gilt.)
(b) Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\Phi(t) = \mathcal{N}_{0,1}(]-\infty, t])$ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}_{0,1}$. Zeigen Sie, daß
 (i) $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$
 (ii) $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}([a, b]) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

Aufgabe 22:

a) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $a > 0$. Berechnen Sie für $b > 0$ die Dichte der Zufallsvariable $Y = b \cdot \log(X)$ und $Z = X^2$.
b) Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable, d.h. $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, k \geq 1, p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Y = \frac{X}{2} \cdot (1 - (-1)^X)$
c) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern μ, σ, d.h. $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ (vgl. Aufgabe 21). Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Y = \exp(X)$

Abgabe: Do. 26.11.09