Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 27: Sei $n\ in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$. Zeigen Sie:

(a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(c) $\sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\} \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\} \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$

Aufgabe 28: Es sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{0,1\}^n$ und für $1 \leq j \leq n$ definiere

$A_j := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \omega_j = 1\}$ sowie
$B := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j\right) \mod 2 = 1\}$.

Zeigen Sie:

(a) $P(B) = \frac{1}{2}$
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 27)

(b) $(A_1, ..., A_n)$ ist ein unabhängiges System von Ereignissen

(c) $(A_2, ..., A_n, B)$ ist ein unabhängiges System von Ereignissen

(d) $(A_1, ..., A_n, B)$ ist kein unabhängiges System von Ereignissen

Aufgabe 29: $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die monoton wachsend angeordnet seien zu einem Zufallsvektor $(X_{[1]}, \dots, X_{[n]})$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X_{[k]}$ für ein $k = 1, \dots, n$.

(b) Bestimmen Sie speziell die Verteilung von $X_{[1]}$ für den Fall, daß die X_i exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ sind.

Aufgabe 30: Es sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie $E(X^m)$ für $m = 1, 2, 3$.

(b) Geben Sie eine Rekursionsformel für $E(X^m)$ $m \in \mathbb{N}_0$ an.

Abgabe: Do. 10.12.09