Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 39: Bei einer Reihenuntersuchung auf HIV wird ein Test verwendet, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% positiv ausfällt, wenn die untersuchte Person infiziert ist, während er für Nichtinfizierte mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% negativ ausfällt. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Bayes, in Abhängigkeit vom Anteil p der infizierten Personen der Gesamtbevölkerung, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine untersuchte Person

(a) trotz negativem Testergebnis erkrankt ist bzw.
(b) trotz positivem Ergebnis gesund ist.

Skizzieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten als Funktion von p in den Intervallen $[0, 0.1]$ bzw. $[0.9, 1]$.

Aufgabe 40:

(a) Sei $\mathcal{E}_\nu$ eine Exponentialverteilung mit unbekanntem Parameter $\nu > 0$. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für ν. (Hinweis: Logarithmieren Sie die Likelihood-Funktion)
(b) Sei G_p eine eine Geometrische Verteilung mit Zähldichte $G_p\{k\} = p(1-p)^k, k \geq 1$. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für p.

Aufgabe 41: Sei $\mathcal{L}_{\Omega_m}$ die diskrete Gleichverteilung auf $\Omega_m = \{1, ..., m\}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ ein unbekannter Parameter ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{m_n}(x) := \max(x_1, ..., x_n)$, für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$, der ML-Schätzer zum Stichprobenumfang n ist.

Abgabe: 21.01.10