Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Dr. Alexander Hoffmann Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 35: Es seien X, Y quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\mathrm{Korr}(X, Y) = \pm 1$. Zeigen Sie:

(a) $\exists\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\mathrm{Var}(Y - aX) = 0$
(Hinweis: Formel von Bienaimée und Aufgabe 33 sind nützlich.)

(b) $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so dass $P\{Y = aX + b\} = 1$
(Hinweis: Aufgabe 33 ist nützlich.)

Aufgabe 36: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge quadratisch integrierbarer Zufallsvariabler mit $E(X_n) = \mu$, $V(X_n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $M \geq 0$, sowie $\mathrm{Kov}(X_i, X_j) \to 0$ für $|i - j| \to \infty$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big) \leq nM + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\big|\mathrm{Kov}(X_j, X_{k+j})\big|$
(Hinweis: Formel von Bienaimée.)

(b) $\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\big|\mathrm{Kov}(X_j, X_{k+j})\big| < M\sqrt{n}n + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}\big|\mathrm{Kov}(X_j, X_{k+j})\big|$,
wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die Gaussklammer bezeichnet.

(c) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right\} \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$. D.h., daß für die Folge (X_n) das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt.

Aufgabe 37: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei gleichverteilt in $[-1, 1]$. Zeigen Sie:

(a) $(Y_k := \sin k\pi X)_{k\geq 1}$ sind paarweise unkorreliert.

(b) $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \sin k\pi X \to 0$ stochastisch.

Aufgabe 38: Zeigen sie mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0,97$ bei 1000 getrennten Versuchen mit einer fairen Münze mindestens 408-mal und höchstens 592-mal Zahl erscheint.

Abgabe in den Übungen vom 09.01.2012 - 12.01.2012.

Eine besinnliche Weihnachtszeit und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünschen ihnen Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler und das gesamte Stochastik-Team.