

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 3: Geben Sie bei den Aufgaben eine geeignete σ -Algebra zur mathematischen Beschreibung des Experiments an.

- (a) Ein Würfel wird geworfen und abhängig vom Ergebnis i des Wurfes aus einer von sechs Urnen U_1, \dots, U_6 eine Kugel gezogen, wobei in der i -ten Urne i rote und $7 - i$ schwarze Kugeln liegen. Stellen Sie das Ereignis "eine rote Kugel wurde gezogen" mathematisch dar.
- (b) Beim Eiskunstlauf beurteilen die Richter die Leistungen von sechs Läufern. Jeder der Richter darf genau einmal jede Note $1, \dots, 6$ vergeben. Stellen Sie das Ereignis "ein Läufer erhält nur die Note 6 von allen Richtern" dar.

Aufgabe 4: $\mathfrak{A} \subset \text{Pot}(\Omega)$ sei eine σ -Algebra, $(A_n)_n \subset \mathfrak{A}$ eine Folge von Ereignissen.

- (a) Zeigen Sie, daß

$$\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \omega \in A_n \text{ für fast alle } n$$

$$\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n$$

- (b) Zeigen Sie, daß die folgenden zusammengesetzten Ereignisse in \mathfrak{A} liegen:

- (i) Mindestens zwei der Ereignisse (A_n) treten ein.

Mit einem Run der Länge k bezeichnet man eine Folge von k hintereinander auftretenden Ereignissen aus (A_n) .

- (ii) Runs beliebiger Länge treten auf.

- (iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Runs der Länge n .

(*Hinweis:* Drücken Sie die Ereignisse mit Hilfe der Mengenoperationen \cap, \cup und \setminus durch die Ereignisse (A_n) aus.)

Aufgabe 5: Es sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und für $i \in I$ sei \mathfrak{A}_i eine σ -Algebra auf Ω . Zeigen Sie, daß dann auch

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$$

eine σ -Algebra ist.

Abgabe: in den Übungen vom 24.10. - 27.10.