Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Dr. Alexander Hoffmann

Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 11: $\mathfrak{A} \subset \text{Pot}(\Omega)$ sei eine σ-Algebra, $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(p_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Zeigen Sie, daß durch

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mu_i(A) \quad \text{für } A \in \mathfrak{A}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ definiert wird.

Aufgabe 12:

(a) Zeigen Sie, daß die Menge

$\{f : \{1,\ldots,r\} \to \{1,\ldots,n\} \mid \forall i \in \{1,\ldots,n\} : \#f^{-1}(\{i\}) = k_i\}$

aus $\frac{r!}{k_1!\cdots k_n!}$ Elementen besteht, wobei $k_i \geq 0, \sum_{j=1}^{n} k_j = r$ und $r \geq n$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mittels (a) die Anzahl der surjektiven Abbildungen zwischen $\{1,\ldots,r\}$ und $\{1,\ldots,n\}$.

(c) Bestimmen Sie mit der Siebformel die Anzahl der surjektiven Abbildungen zwischen $\{1,\ldots,r\}$ und $\{1,\ldots,n\}$, indem Sie zunächst die Kardinalität der Menge der nicht surjektiven Abbildungen bestimmen.
(*Hinweis:* Die Siebformel für Kardinalitäten folgt aus Satz (2.5), indem man $P = \mathcal{L}_\Omega$ wählt und dann mit $\#\Omega$ multipliziert!)

Aufgabe 13: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200\}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl aus M zu ziehen, die entweder durch 2, 3 oder durch 5 teilbar ist?

Aufgabe 14: Man plaziere auf einem Schachbrett zufällig 8 Türme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keiner der Türme einen anderen schlagen kann?
(*Hinweis:* Man zähle ab, auf wie viele Arten sich 8 Türme auf dem 8×8-Schachbrett so aufstellen lassen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Turm steht.)

Abgabe: in den Übungen vom 07.11 - 10.11.