Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Dr. Alexander Hoffmann

Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 15: Eine Firma stellt drei verschiedene Artikel a, b und c her. Sie berichtet, daß von 1000 befragten Haushalten 70 mindestens a und b, 98 mindestens b und c, 119 mindestens a und c, 49 alle drei und 190 mindestens zwei der Artikel benutzen. Kann man diesen Angaben Glauben schenken?
(*Hinweis:* Untersuchen Sie mit der Siebformel die Kardinalität der Menge aller Haushalte, die mindestens zwei Artikel benutzen.)

Aufgabe 16: Acht Kugeln fallen zufällig und "unabhängig voneinander" in vier Fächer (alle 4^8 Möglichkeiten seien gleichwahrscheinlich). Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Fach leer?

Aufgabe 17: Es seien $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $A_n \in \mathfrak{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

$$1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \quad \text{und} \quad 1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \prod_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$$

$$1_{\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \limsup_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \quad \text{und} \quad 1_{\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \liminf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$$

$$1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \quad \text{falls die } A_n \text{ disjunkt sind}$$

$$1_{A_1 \setminus A_0} = 1_{A_1} - 1_{A_0} \quad \text{falls } A_0 \subset A_1$$

Aufgabe 18: Es sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie:

(a) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar $\iff \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar $\Longrightarrow f^2$ meßbar.
(c) $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar $\Longrightarrow f \cdot g$ meßbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $(f + g)^2$ meßbar ist.

Abgabe: in den Übungen vom 14.11 - 17.11.