Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Dr. Alexander Hoffmann

Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Stochastik I

Aufgabe 31: Die Zufallsvariable X_i bezeichne das Ergebnis des i-ten Ziehens beim n-fachen Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne, die M schwarze und $N-M$ gelbe Kugeln enthalte; $N, M \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $P\{X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\}$
$$= \frac{M \cdots (M-r+1) \cdot (N-M) \cdots (N-M-s+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$
wobei $i_j \in \{0,1\} \hat{=} \{\text{gelb,schwarz}\}$ für $1 \leq j \leq n$ und $r = \sum i_j$, $s = \sum(1-i_j)$.

(b) Alle X_i sind identisch verteilt.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung $\mathcal{H}_{n;N,M}$ und vergleichen Sie ihn mit dem Erwartungswert, den man beim Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne gleichen Typs erhält.

Aufgabe 32: Wir betrachten ein aus mehreren Komponenten bestehendes Aggregat. Die Lebensdauern der einzelnen Komponenten (ab ihrem Einschalten) seien unabhängige Zufallsvariable mit der gleichen Exponentialverteilung $\mathcal{E}_\lambda$. Berechnen Sie in den folgenden Situationen jeweils den Erwartungswert der Lebensdauer des Aggregats.

(a) Es gibt zwei Komponenten, wobei die zweite Komponente erst dann eingeschaltet wird, wenn die erste ausfällt (Aggregat mit "kalter Reserve").

(b) Aggregat mit zwei Komponenten, die gleichzeitig eingeschaltet sind und parallel arbeiten ("heiße Reserve").

(c) Zur Erhöhung der Sicherheit bei b) wird eine dritte Komponente aktiviert, sobald eine der ersten beiden ausfällt. Diese arbeitet dann parallel zur verbliebenen. (*Hinweis:* Zeigen Sie, daß für unabhängige $\mathcal{E}_\lambda$-verteilte X, Y die Zufallsvariable $\max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}$ auch die Verteilung $\mathcal{E}_\lambda$ hat.)

Aufgabe 33: X, Y seien quadratisch integrierbare Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Aus $X \leq Y$ und $E(X) = E(Y)$ folgt $P\{X = Y\} = 1$.

(b) Die Varianz $V(X) = 0$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $P\{X = c\} = 1$.

Aufgabe 34: Von einem nicht fairen Würfel seien folgende Werte der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X “Augenzahl beim einmaligen Würfeln“ bekannt:

i	1	2	3	4	5	6
$P(X=i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

(a) Bestimmen Sie $E(X)$.
(b) Bestimmen Sie $Var(X)$.
(c) Bestimmen Sie $E(\frac{1}{X})$.

Abgabe: in den Übungen vom 19.12 - 22.12.