Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Dr. Alexander Hoffmann

Wintersemester 2011/2012

Probeklausur zur Vorlesung Stochastik I

Wählen Sie aus den folgenden fünf Aufgaben vier Aufgaben aus. Die maximal erreichbare Punktezahl finden Sie neben jeder Aufgabe. Tragen Sie die Nummern der gewählten Aufgaben in das folgende Kästchen ein:

Gewählte Aufgabe:				

Die Bearbeitung anderer Aufgaben(teile) wird nicht bewertet.

Für einen Leistungsnachweis sind mindestens $19 \pm \epsilon$ Punkte notwendig.
Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt welches Sie mit Ihrem Namen und der Matrikelnummer versehen. Achten Sie in der Klausur auf sorgfältige und exakte Formulierungen.
Bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben genügt es, entsprechende Formeln abzuleiten. Exakte numerische Berechnungen, etwa mit Hilfe eines Taschenrechners sind nicht erforderlich.
Hilfsmittel sind bis auf einen handgeschriebenen Formelzettel und einen nicht-programmierbaren Taschenrechner nicht zugelassen! Der Formelzettel muss mit abgegeben werden!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

(a) Einem Kasten, der 16 weiße und 16 schwarze Schachfiguren enthält, werden nacheinander 3 Figuren zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, hierbei 3 schwarze Figuren zu bekommen?

(b) In einem Aufzug, der noch 6 Stockwerke fährt, sind 4 Personen, die voneinander unabhängig aussteigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß
- (i) alle in verschiedenen Stockwerken
- (ii) zwei in einem und die anderen beiden jeweils verschiedenen Stockwerken
- (iii) alle 4 im gleichen Stockwerk
- (iv) mindestens 3 im gleichen Stockwerk

aussteigen?

8 Punkte

Aufgabe 2: Die Zufallsvariable U sei gleichverteilt in $(0,1)$ sowie $\alpha > 0$. Es sei $X = U^{-1/\alpha}$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X sowie die Dichte der Verteilung von X.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha > 0$ für die
- (i) der Erwartungswert von X existiert;
- (ii) die Varianz von X existiert;

und berechnen Sie Erwartungswert/Varianz im Falle der Existenz.

(c) Sei nun $U_1, U_2, ...$ eine Folge von unabhängigen auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen und $\alpha > 2$. Zeigen Sie, dass ein $\mu > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i^{-1/\alpha} \to \mu \ \text{ stochastisch für } n \to \infty.$$

12 Punkte

Aufgabe 3: In einem Friseur-Laden mit 9 Friseuren dauert ein Haarschnitt 10 Minuten. Herr Snyder betritt den Laden und sieht, daß alle 9 Friseure beschäftigt sind. Die Zeitpunkte $T_1, ..., T_9$ des Fertigwerdens der Friseure $1, ..., 9$ seien in $[0, 10]$ gleichverteilt und unabhängig. Es bezeichne T die Wartezeit von Herrn Snyder bis er bedient wird.

(a) (i) Geben Sie eine Formel für T an.
(ii) Zeigen Sie, daß die Verteilungsfunktion F_T von T die Gestalt

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - (1 - \frac{t}{10})^9 & 0 \leq t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases}$$

hat.

(b) Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von T .

(c) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit von Herrn Snyder.

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Aufgabe 4: Die Lebensdauer X eines Systems sei verteilt mit Verteilungsfunktion

$$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^\beta} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Dabei sind $\alpha, \beta > 0$ fest.

(a) Zeigen Sie, daß die Verteilung von X eine Lebesque-Dichte besitzt und bestimmen Sie diese.

(b) Bestimmen Sie für $\beta = 1$ und $\beta = 2$ den Erwartungswert $E(X)$.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Y = X^\beta$.

(d) Sei $a > 0$. Weiter seien X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Geben Sie die Verteilungsfunktion von $Z = \min(aX_1, aX_2)$ an. Für welche a ist $F_Z = F$?

$\boxed{\text{12P}}$

Aufgabe 5:

(a) Von den Übungsaufgaben zu einer bestimmten Vorlesung werden 20% vom Professor, 50% vom Assistenten und 30% von einer Hilfskraft gestellt. Von den Aufgaben des Professors können Sie erfahrungsgemäß 80%, von denjenigen des Assistenten 60% und von denjenigen der Hilfskraft 50% lösen. Wieder einmal können Sie eine Übungsaufgabe nicht lösen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Aufgabe vom Professor, vom Assistenten bzw. von der Hilfskraft?

(b) Ein Student, der an einem *wahr-falsch* Test teilnimmt, verfährt bei der Beantwortung der Fragen folgendermaßen: Sofern er die Antwort weiß, kreuzt er diese an, andernfalls wirft er eine Münze, um sich für wahr oder falsch zu entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit, dass dem Studenten die richtige Antwort bekannt ist, sei $\frac{3}{5}$. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er eine richtig markierte Antwort wusste?

8 Punkte