Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Sommersemester 2010

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 1: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl von Elementen.

$$\mathfrak{D} = \{A \subset \Omega : \#A \text{ gerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System ist, aber keine σ-Algebra.

Aufgabe 2: Für jedes $\mathcal{E} \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$ sei

$$\mathfrak{R}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathfrak{R} \text{ Ring}, \mathcal{E} \subset \mathfrak{R}} \mathfrak{R}$$

der kleines Ring, der $\mathcal{E}$ enthält.

(i) Zeigen Sie: Sei $\mathfrak{R}_i$ ein Ring in Ω $\forall i \in I \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$ ist ein Ring in Ω

(ii) Man beweise die Existenz von $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$

(iii) Man bestimme $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ und $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$ für den Fall $\mathcal{E} = \{A\}$ für $A \subset \Omega$ beliebig. Wann gilt $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ in diesem Spezialfall?

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass

$$\mathfrak{A}(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) = \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die beiden Einschlüsse "$\subset$" und "$\supset$"

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

(a) Wenn $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra ist, dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

(b) Wenn $\mathcal{E} \subset \mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{E})$, dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ für ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{F}$.

Abgabe: Diesmal keine Abgabe; Besprechung in der Übung am 27.04.10