Prof Dr. Hans-Peter Scheffler Sommersemester 2010

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 42: (Cramér-Wold-Device II)
Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_n) \subset M^1(\mathbb{R}^d)$ konvergiert genau dann schwach gegen P, wenn für jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $(P_n)_\varphi \xrightarrow{w} P_\varphi$ gilt.

Aufgabe 43: Es sei (X_n) eine Folge unabhängiger reeller zentrierter Zufallsvariabler. Zeigen Sie, daß (X_n) genau dann dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, wenn die Funktionenfolge

$$f_n(\xi) := \prod_{i=1}^{n} \widehat{P_{X_i}}(\frac{\xi}{n}) \to 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 44: Es sei (X_i) eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariabler mit endlichem Erwartungswert $\mu = E(X_i)$ und endlicher Varianz $\sigma^2 = V(X_i) > 0$. Zeigen Sie, daß dann die folgende Variante des zentralen Grenzwertsatzes gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\Big) \Longrightarrow \mathcal{N}_{0,\sigma^2} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 45: Es sei (Z_i) eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariabler mit $P_{Z_i} = \mathcal{N}_{0,1}$ und $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i^2$. Man sagt, daß dann X_n eine χ_n^2-Verteilung besitzt. Zeigen Sie, daß

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}_{0,2} \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt.

Abgabe: Dienstag, den 13.06