Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Sommersemester 2010

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 5: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ überabzählbar und

$$\mathfrak{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

(i) Zeigen Sie, dass durch $\mu_1(A) = \#A$ und

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ abzählbar} \\ \infty & A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

Maße auf $\mathfrak{A}$ definiert werden.

(ii) Zeigen Sie ohne Verwendung von Satz 2.5., dass μ_1 und μ_2 $\emptyset$-stetig sind.

(iii) Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 2.5., dass μ_1 und μ_2 $\emptyset$-stetig sind.

Aufgabe 6: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} \subset \text{Pot}(\Omega)$. Zeigen Sie: Für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E})$ existiert eine abzählbares Mengensystem $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$ mit $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E}_A)$. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\mathcal{M}$ derjenigen $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E})$ für die die Behauptung richtig ist und zeigen Sie $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ sowie $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra.)

Aufgabe 7: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge mit endlich vielen Elementen. Man zeige

(i) das Zählmaß ζ auf $\text{Pot}(\Omega)$ ist gleich $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \varepsilon_\omega$

(ii) jedes Maß μ auf $\text{Pot}(\Omega)$ ist von der Form $\mu = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega \varepsilon_\omega$ mit $\alpha_\omega = \mu(\{\omega\})$

Aufgabe 8: Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω. Es sei

$$\mathcal{N}_\mu = \{N \in \mathfrak{A} : \mu(N) = 0\}$$

das System der μ-Nullmengen. Man zeige:

(a) $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$;

(b) Für $N \in \mathcal{N}_\mu$, $M \subset N$ mit $M \in \mathfrak{A}$ gilt $M \in \mathcal{N}_\mu$;

(c) Sind $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ für alle $n \geq 1$ so gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}_\mu.$$

Abgabe: Dienstag, den 27.04.2010