Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Sommersemester 2010

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 9 Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie dasjenige W.-Maß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ welches F als Verteilungsfunktion besitzt. (*Hinweis:* Raten Sie μ.)

Aufgabe 10: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine beschränkte monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. f sei stetig von rechts und $\lim_{x\uparrow x_0} f(x)$ existiere für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Es sei $\mathcal{F}$ wie in Bsp. 2.17. Analog zu Beispiel 2.17 zeige man

(i) es existiert genau ein Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ mit $\mu(F) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$, wobei $\mu(I_i) = f(b_i) - f(a_i)$ für $I_i = (a_i, b_i]$ paarweise disjunkt und $F = \bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathcal{F}$, (Hinweis: Beispiel 2.17)

(ii) μ aus (i) ist Prämaß auf $\mathcal{F}$, (Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.5 analog zu Beispiel 2.17)

(iii) Es existiert genaugenau ein Maß $\hat{\mu}$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ mit $\hat{\mu}(]-\infty, x]) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Hinweis:Satz 2.16)

Aufgabe 11: Es seien μ_1, μ_2 endliche Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\mathcal{R}$ ein Ring mit $\Omega \in \mathcal{R}$, der die σ-Algebra $\mathfrak{A}$ erzeugt, d.h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{R})$. Zeigen Sie:

$$\forall A \in \mathcal{R} : \mu_1(A) \leq \mu_2(A) \Rightarrow \forall B \in \mathfrak{A} : \mu_1(B) \leq \mu_2(B).$$

(Hinweis: Zeigen Sie für die zugehörigen äußeren Maße $\mu_i^*, i = 1, 2$: $\forall Q \subset \Omega : \mu_1^*(Q) \leq \mu_2^*(Q)$ sowie mittels des Eindeutigkeitssatzes $\forall A \in \mathfrak{A} : \mu_i^*(A) = \mu_i(A), i = 1, 2$ und folgern Sie daraus die Behauptung.)

Abgabe: Dienstag, den 4.5.2010 in der Vorlesung