Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Sommersemester 2010

**Übungen zur Stochastik II**

---

**Aufgabe 12:** Für $n \geq 1$ seien $H_n \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $H_n \neq \emptyset$. Weiter gelte $H_n \downarrow$, d.h. $H_{n+1} \subset H_n$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset$$

gilt.

**Aufgabe 13:** Zeigen Sie Eigenschaft (3.3)(d) aus der Vorlesung: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine meßbare, numerische Funktion. Schreibt man $f = f_x - f_-$ mit $f_+ := \max(f, 0), f_- := \max(-f, 0)$, so sind $f_+$, $f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$ meßbar.

**Aufgabe 14:** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ meßbar bezüglich $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ ist und berechnen Sie $\int f \, d\lambda^1$.

**Aufgabe 15:** Seien $(S, \mathcal{B}), (T, \mathcal{C}), (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ Messräume und $g : S \to T$, $f : T \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie

(i) $\mathfrak{A}(f) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathbb{B}\}$ ist eine $\sigma$-Algebra auf $T$ und $f : (T, \mathfrak{A}(f)) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$;

(ii) Aus $f : (T, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ folgt $\mathfrak{A}(f) \subset \mathcal{C}$;

(iii) Ist $f \circ g$ $\mathcal{B} - \mathbb{B}$ messbar, dann ist $g$ $\mathcal{B} - \mathfrak{A}(f)$ messbar;

(iv) $g : (S, \mathcal{B}) \to (T, \mathcal{C}), A \in \mathcal{B} \not\Rightarrow g(A) := \{g(x) : x \in A\} \in \mathcal{C}$;
(Hinweis: Gegenbeispiel)

(v) $|f|$ messbar $\not\Rightarrow f$ messbar.
(Hinweis: Gegenbeispiel)

---

**Abgabe:** Dienstag, den 11.5.2010 in der Vorlesung