Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler — Sommersemester 2010

Übungen zur Stochastik II

Definition: Sei $x = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i b^i$, dann heißt $a_n a_{n-1}...a_0 a_{-1}...a_{-n}$ $b-$adische Darstellung von x. $a_i \in \{0, ..., b-1\}$ heißen Ziffern. (Bsp.: Dualzahlen sind 2-adisch, Dezimalzahlen sind 10-adisch).

Aufgabe 16: (Die Cantormenge)
Zerlegen sie das abgeschlossene Intervall $A_0 = [0, 1]$ in drei gleich lange Teilintervalle und entfernen Sie das Innere des mittleren. Die verbleibende Menge A_1 besteht dann aus zwei disjunkten, abgeschlossenen Intervallen. Mit jedem dieser Intervalle verfahren Sie wie vorher mit A_0. Die verbleibende Menge A_2 besteht nun aus vier disjunkten, abgeschlossenen Teilintervallen. Mit diesem verfahren Sie genau so usw. Auf diese Weise erhalten Sie eine absteigende Folge (A_n) von Mengen. Setzen Sie

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

C heißt Cantormenge bzw. Cantor'sches Diskontinuum. Sei λ^1 das Lebesquemaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Jede Menge $A_n, n \in \mathbb{N}$, ist kompakt
(ii) $C \neq \emptyset$
(iii) $\lambda^1(A_n) = (\frac{2}{3})^n$
(iv) $\lambda^1(C) = 0$, d.h. C ist eine λ^1-Nullmenge
(v) $x \in C$, wenn in der 3-adischen Darstellung von x nur Nullen und Zweien auftreten, d.h.

$$C = \{x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} | a_n \in \{0, 2\} \, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

(Hinweis: Zeigen Sie: jede Zahl im Intervall $(0, 1)$, die die Ziffer 1 an mindestens einer Stelle in der triadischen Darstellung hat, wird bei der Konstruktion entfernt.)
(vi) C ist nicht abzählbar.
(Hinweis: Cantor'sches Diagonalverfahren.)

Aufgabe 17: Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \geq 1$. Weiter sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f \text{ meßbar}, \int |f|^p d\mu < \infty\}$$

der Raum der p-fach μ-integrierbaren Funktionen und für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sei

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

die p-Halbnorm. Zeigen Sie, daß

(a) für $p > 1$ und $q > 1$ mit $(1/p) + (1/q) = 1$ gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{(Höldersche Ungleichung)}$$

(Hinweis: Verwenden Sie die 3-Schrittdefinition des Integrals und im ersten Schritt die die Bernoullische Ungleichung.)

(b) für $p \geq 1$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{(Minkowskische Ungleichung)}$$

(Hinweis: Verwenden Sie die 3-Schrittdefinition des Integrals und im ersten Schritt die Minkowski-Ungleichung)

Aufgabe 18: Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq p' \leq p < \infty$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^{p'}(\mu)$$

(*Hinweis:* Höldersche Ungleichung.)

Abgabe: Dienstag, den 18.5.2010 in der Vorlesung