Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 19: Es sei $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$ das zweidimensionale Lebesque-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$. Es sei $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ und $f = 1_A$. Zeigen Sie,

- f_{ω_1} ist für alle $\omega_1 \in \mathbb{Q}$ **nicht** λ^1-integrierbar
- f_{ω_2} ist für alle $\omega_2 \in \mathbb{R}$ λ^1-integrierbar
- $\int f d\lambda^2 = 0$

[Notation: $f_{\omega_1} := f(\omega_1, \cdot) = 1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}}(\omega_1, \cdot)$, $f_{\omega_2} := f(\cdot, \omega_2) = 1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}}(\cdot, \omega_2)$]

Aufgabe 20 : Sei P ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, (\mathbb{R})))$ mit stetiger Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass

$$\int F dP = \frac{1}{2}$$

gilt.
(Hinweis: Verwenden Sie $F(x) = \int 1_{(-\infty,x]} dP$ und den Satz von Fubini.)

Aufgabe 21: Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable mit

$$P\{|X| > t\} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ t^{-\alpha} & t > 1 \end{cases}$$

für ein gegebenes $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die Menge aller $p \geq 0$ für die $E|X|^p < \infty$ gilt.

Abgabe: Dienstag, den 01.06