Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler SS2010

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 22: Sei μ ein symmetrisches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$, d.h. $\mu(A) = \mu(-A)$ für alle $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, wobei $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Weiterhin sei $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R})$ eine μ-integrierbare, ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int f d\mu = 0$$

gilt.
(Hinweis: Setzen Sie $T(x) = -x$ und zeigen Sie $T\mu = \mu$. Wenden Sie dann Korollar 3.16 an.)

Aufgabe 23 : Auf dem Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^2)$ betrachte man die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) := \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \cdot 1_{[-1,1]^2}(x,y)$$

(i) Berechnen Sie die iterierten Integrale $\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y) d\lambda^1(y) d\lambda^1(x)$ sowie $\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y) d\lambda^1(x) d\lambda^1(y)$
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 22)

(ii) Untersuchen Sie, ob f integrierbar bzgl $\lambda^2|_{[-1,1]^2}$ ist.
(Hinweis: Satz von Fubini)

Aufgabe 24: Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariabler auf Ω. Zeigen Sie, daß

$$X_n \to 0 \quad \text{stochastisch für } n \to \infty$$

genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $P\{|X_n| > \varepsilon\} < \varepsilon$ gilt.

Aufgabe 25: Es seien X_n, X reelle Zufallsvariablen $(n \geq 1)$ mit $X_n \xrightarrow{P} X$ für $n \to \infty$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Abgabe: Dienstag, den 08.06