Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler SS2010

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 26: Es sei X eine ZV mit $E|X| < \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$E|X| = |E(X)| \Leftrightarrow X \geq 0 \ P\text{-f.s. oder } X \leq 0 \ P\text{-f.s.}$$

gilt

Aufgabe 27: Seien X, Y und $(X_n)_{n\geq 1}$ ZV, so dass $X_n \to X$ stochastisch für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$X = Y \ P\text{-f.s.} \ \Leftrightarrow X_n \to Y \ \text{ stochastisch für } n \to \infty$$

gilt.

Aufgabe 28: Es sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten reellen Zufallsvariablen mit $P_{X_i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{+1}$ sowie $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ und $S_0 = 0$. $(S_n)_{n\geq 0}$ heißt einfache symmetrische Irrfahrt. Weiter sei $Y_n = 1_{\{S_n=0\}}$. Zeigen Sie, dass $Y_n \to 0$ stochastisch und im p-ten Mittel für jedes $p \geq 1$.
(Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingsche Formel)

Aufgabe 29: Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

wenn alle $X_i \geq 0$ oder alle X_i integrierbar sind. Im zweiten Fall ist auch das Produkt integrierbar. (Hinweis: Verwenden Sie die Sätze von Fubini bzw. Tonelli)

Abgabe: Dienstag, den 15.06.